読者のためのサーポート

MATLAB/Sumulink による

わかりやすい制御工学

— 問題の詳細な解答 —

著者：川田 昌克

目　　次

第 1 章　はじめに **1**

第 2 章　2 章の解答 **2**
問題 2.1 の解答 2
問題 2.2 の解答 3
問題 2.3 の解答 3
問題 2.4 の解答 4
問題 2.5 の解答 4
問題 2.6 の解答 5
問題 2.7 の解答 5
問題 2.8 の解答 6
問題 2.9 の解答 6
問題 2.10 の解答 (MATLAB) 6
問題 2.11 の解答 (MATLAB) 7

第 3 章　3 章の解答 **9**
問題 3.1 の解答 9
問題 3.2 の解答 11
問題 3.3 の解答 12
問題 3.4 の解答 13
問題 3.5 の解答 16
問題 3.6 の解答 16
問題 3.7 の解答 16
問題 3.8 の解答 18
問題 3.9 の解答 18
問題 3.10 の解答 18

問題 3.11 の解答 20
問題 3.12 の解答 (MATLAB) 21
問題 3.13 の解答 (MATLAB) 23
問題 3.14 の解答 (MATLAB) 26
問題 3.15 の解答 (MATLAB) 27

第 4 章 4 章の解答 **29**
問題 4.1 の解答 29
問題 4.2 の解答 29
問題 4.3 の解答 30
問題 4.4 の解答 31
問題 4.5 の解答 32
問題 4.6 の解答 36
問題 4.7 の解答 37
問題 4.8 の解答 (MATLAB) 38
問題 4.9 の解答 (MATLAB) 40
問題 4.10 の解答 (MATLAB) 42

第 5 章 5 章の解答 **44**
問題 5.1 の解答 44
問題 5.2 の解答 45
問題 5.3 の解答 46
問題 5.4 の解答 48
問題 5.5 の解答 (MATLAB) 50

第 6 章 6 章の解答 **53**
問題 6.1 の解答 53
問題 6.2 の解答 54
問題 6.3 の解答 57
問題 6.4 の解答 58
問題 6.5 の解答 58
問題 6.6 の解答 59
問題 6.7 の解答 60
問題 6.8 の解答 64

問題 6.9 の解答 (MATLAB) 65
問題 6.10 の解答 (MATLAB) 69

第 7 章 7 章の解答 **71**
問題 7.1 の解答 71
問題 7.2 の解答 72
問題 7.3 の解答 76
問題 7.4 の解答 (MATLAB) 77
問題 7.5 の解答 (MATLAB) 78

第 8 章 8 章の解答 **84**
問題 8.1 の解答 84
問題 8.2 の解答 86

第 9 章 グラフのカスタマイズ (MATLAB) **89**
9.1 コマンドでカスタマイズする方法 89
9.2 Figure Window でカスタマイズする方法 91
9.2.1 MATLAB Ver.5.3.x (リリース 11.x) の場合 91
9.2.2 MATLAB Ver.6.0 (リリース 12) の場合 93

第1章

はじめに

本稿は著書

- MATLAB/Simulink によるわかりやすい制御工学

における問題の詳細な解答を示したものです．

更新履歴

- 2001 年 7 月 7 日：問題 2.1 ～ 2.9 の解答を公開
- 2001 年 7 月 11 日：問題 3.1 ～ 3.11 の解答を公開
- 2001 年 7 月 12 日：問題 4.1 ～ 4.7 の解答を公開
- 2001 年 7 月 27 日：問題 5.1 ～ 5.4 の解答を公開
- 2001 年 7 月 30 日：問題 6.1 ～ 6.8 の解答を公開
- 2001 年 7 月 31 日：問題 7.1 ～ 7.3 の解答を公開
- 2001 年 8 月 1 日：問題 8.1, 8.2 および MATLAB/Simulink の問題 2.10, 2.11，問題 3.12 ～ 3.15 の解答を公開
- 2001 年 8 月 3 日：MATLAB/Simulink の問題 4.8 ～ 4.10 の解答を公開
- 2001 年 8 月 6 日：MATLAB/Simulink の問題 5.5，問題 6.9, 6.10，問題 7.4, 7.5 の解答および「グラフのカスタマイズ (MATLAB)」を公開

間違いがあれば，お手数ですが，kawata@maizuru-ct.ac.jp までご連絡下されば幸いです．

第 2 章

2 章の解答

問題 **2.1** の解答

(1)　線形微分方程式

$$\dot{y}(t) + 2y(t) = u(t)$$

において，初期値を零としてラプラス変換すると，

$$sy(s) + 2y(s) = u(s) \quad \longrightarrow \quad (s+2)y(s) = u(s)$$

となる．したがって，$u(s)$ から $y(s)$ の伝達関数 $P(s)$ は

$$P(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{s+2}$$

となる．$P(s)$ の極は

$$s + 2 = 0$$

の根 -2 である．また，$P(s)$ の分子は定数であるから，零点は持たない．

(2)　線形微分方程式

$$3\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = 2\dot{u}(t) + u(t)$$

において，初期値を零としてラプラス変換すると，

$$3s^2y(s) + 2sy(s) + y(s) = 2su(s) + u(s)$$

$$\longrightarrow \quad (3s^2 + 2s + 1)y(s) = (2s+1)u(s)$$

となる．したがって，$u(s)$ から $y(s)$ の伝達関数 $P(s)$ は

$$P(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{2s+1}{3s^2+2s+1}$$

となる．$P(s)$ の極は

$$3s^2 + 2s + 1 = 0$$

の根であるから，$\dfrac{-1 \pm \sqrt{2}j}{3}$ である．また，$P(s)$ の零点は

$$2s + 1 = 0$$

の根であるから，$-\dfrac{1}{2}$ である．

問題 **2.2** の解答

図 **2.9** の RCL 回路における回路方程式は

$$\begin{cases} v_{in}(t) = Ri(t) + L\dfrac{di(t)}{dt} + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i(\tau)d\tau \\ i(t) = \dot{q}(t) \end{cases}$$

である．$u(t) = v_{in}(t),\ y(t) = q(t)$ とし，ラプラス変換すると，

$$\begin{cases} u(t) = Ri(t) + L\dfrac{di(t)}{dt} + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i(\tau)d\tau \\ i(t) = \dot{y}(t) \end{cases}$$

$$\longrightarrow \quad \begin{cases} u(s) = Ri(s) + Lsi(s) + \dfrac{1}{Cs}i(s) \\ \qquad = \dfrac{LCs^2 + RCs + 1}{Cs}i(s) \\ i(s) = sy(s) \end{cases}$$

$$\longrightarrow \quad u(s) = \frac{LCs^2 + RCs + 1}{Cs} \times sy(s)$$

$$= \frac{LCs^2 + RCs + 1}{C}y(s)$$

となる．したがって，$u(s)$ から $y(s)$ への伝達関数 $P(s)$ は以下のようになる．

$$P(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{C}{LCs^2 + RCs + 1}$$

問題 **2.3** の解答

(1) 図 **2.10** の RC 回路における回路方程式

$$v_{in}(t) = Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau$$

において，$u(t) = v_{in}(t),\ y(t) = i(t)$ とし，ラプラス変換すると，

$$u(t) = Ry(t) + \frac{1}{C}\int_0^t y(\tau)d\tau$$

$$\longrightarrow \quad u(s) = Ry(s) + \frac{1}{Cs}y(s) = \frac{RCs + 1}{Cs}y(s)$$

となる．したがって，$u(s)$ から $y(s)$ への伝達関数 $P(s)$ は

$$P(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{Cs}{RCs + 1}$$

となる．

(2) 図 **2.10** の RC 回路における回路方程式

$$\begin{cases} v_{in}(t) = Ri(t) + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i(\tau)d\tau \\ v_{out}(t) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i(\tau)d\tau \end{cases}$$

において，$u(t) = v_{in}(t),\ y(t) = v_{out}(t)$ とし，ラプラス変換すると，

$$\begin{cases} u(t) = Ri(t) + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i(\tau)d\tau \\ y(t) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i(\tau)d\tau \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u(s) = Ri(s) + \dfrac{1}{Cs}i(s) = \dfrac{RCs+1}{Cs}y(s) \\ y(s) = \dfrac{1}{Cs}i(s) \end{cases}$$

となる．したがって，$u(s)$ から $y(s)$ への伝達関数 $P(s)$ は

$$P(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{RCs+1}$$

となる．

問題 **2.4** の解答

図 **2.13 (b)** の水平駆動アーム系において，トルクのつり合いを考えて運動方程式をたてると，

$$J\ddot{\theta}(t) = \tau(t) - c\dot{\theta}(t)$$

となる．$u(t) = \tau(t),\ y(t) = \theta(t)$ とし，両辺をラプラス変換すると，

$$\begin{aligned} J\ddot{y}(t) = u(t) - c\dot{y}(t) \quad &\longrightarrow \quad Js^2y(s) = u(s) - csy(s) \\ &\longrightarrow \quad (Js^2 + cs)y(s) = u(s) \end{aligned}$$

であるから，$u(s)$ から $y(s)$ への伝達関数 $P(s)$ は

$$P(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{Js^2 + cs}$$

となる．

問題 **2.5** の解答

図 **2.13 (a)** の台車系において，力のつり合いを考えて運動方程式をたてると，

$$M\ddot{z}(t) = f(t) - c\dot{z}(t)$$

となる．$u(t) = f(t),\ y(t) = \dot{z}(t)$ とし，両辺をラプラス変換すると，

$$\begin{aligned} M\dot{y}(t) = u(t) - cy(t) \quad &\longrightarrow \quad Msy(s) = u(s) - cy(s) \\ &\longrightarrow \quad (Ms + c)y(s) = u(s) \end{aligned}$$

であるから，$u(s)$ から $y(s)$ への伝達関数 $P(s)$ は

$$P(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{Ms + c}$$

となる．

問題 **2.6** の解答

図 **2.14** のばね・ダンパ系において，ばねにより生じる力は $f_k = -kz(t)$，ダンパにより生じる力は $f_{r1} = -c_1\dot{z}(t)$，粘性摩擦により生じる力は $f_{r2} = -c_2\dot{z}(t)$ である．力のつり合いにより運動方程式をたてると，

$$\begin{aligned} M\ddot{z}(t) &= f(t) + f_k(t) + f_{r1}(t) + f_{r2}(t) \\ &= f(t) - kz(t) - c_1\dot{z}(t) - c_2\dot{z}(t) \\ &= f(t) - kz(t) - (c_1 + c_2)\dot{z}(t) \end{aligned}$$

となる．$u(t) = f(t),\ y(t) = z(t)$ とし，両辺をラプラス変換すると，

$$\begin{aligned} & M\dot{y}(t) = u(t) - ky(t) - (c_1 + c_2)\dot{y}(t) \\ \longrightarrow\quad & Ms^2y(s) = u(s) - ky(s) - (c_1 + c_2)sy(s) \\ \longrightarrow\quad & \left\{Ms^2 + (c_1 + c_2)s + k\right\}y(s) = u(s) \end{aligned}$$

であるから，$u(s)$ から $y(s)$ への伝達関数 $P(s)$ は

$$P(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{Ms^2 + (c_1 + c_2)s + k}$$

となる．

問題 **2.7** の解答

図 **2.13 (a)** の台車系において，運動エネルギー $\mathcal{T}(t)$，位置エネルギー $\mathcal{U}(t)$，損失エネルギー $\mathcal{D}(t)$ はそれぞれ

$$\mathcal{T}(t) = \frac{1}{2}M\dot{z}(t)^2,\ \mathcal{U}(t) = 0,\ \mathcal{D}(t) = \frac{1}{2}c\dot{z}(t)^2$$

である．また，一般化座標は $q(t) = z(t)$，一般化力は $\nu(t) = f(t)$ であるから，ラグランジュの運動方程式は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{T}(t)}{\partial\dot{z}(t)}\right) - \frac{\partial\mathcal{T}(t)}{\partial z(t)} + \frac{\partial\mathcal{U}(t)}{\partial z(t)} + \frac{\partial\mathcal{D}(t)}{\partial\dot{z}(t)} = f(t)$$

とかける．ここで，

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{T}(t)}{\partial\dot{z}(t)}\right) &= \frac{d}{dt}M\dot{z}(t) = M\ddot{z}(t) \\ \frac{\partial\mathcal{T}(t)}{\partial z(t)} = 0,\ \frac{\partial\mathcal{U}(t)}{\partial z(t)} &= 0,\ \frac{\partial\mathcal{D}(t)}{\partial\dot{z}(t)} = c\dot{z}(t) \end{aligned}$$

であるから，台車系の運動方程式 (2.36) 式

$$M\ddot{z}(t) + c\dot{z}(t) = f(t) \quad \longrightarrow \quad M\ddot{z}(t) = -c\dot{z}(t) + f(t)$$

が得られる．

問題 **2.8** の解答

$P(s)$ を書き換えると，

$$P(s) = \frac{1}{Ms + c} = \frac{\dfrac{1}{c}}{1 + \dfrac{M}{c}s}$$

であるから，$T = \dfrac{M}{c}$, $K = \dfrac{1}{c}$ とすれば，1 次遅れ要素の標準形

$$P(s) = \frac{K}{1 + Ts}$$

となる．

問題 **2.9** の解答

(2.24) 式の $P(s)$ を書き換えると，

$$P(s) = \frac{1}{CLs^2 + RCs + 1} = \frac{\dfrac{1}{CL}}{s^2 + \dfrac{R}{L}s + \dfrac{1}{CL}}$$

であるから，

$$\begin{cases} 2\zeta\omega_n = \dfrac{R}{L} \\ \omega_n^2 = \dfrac{1}{CL} \\ K\omega_n^2 = \dfrac{1}{CL} \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \omega_n = \dfrac{1}{\sqrt{CL}} \\ \zeta = \dfrac{1}{2\omega_n} \times \dfrac{R}{L} = \dfrac{\sqrt{CL}}{2} \times \dfrac{R}{L} = \dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L}} \\ K = \dfrac{1}{\omega_n^2} \times \dfrac{1}{CL} = CL \times \dfrac{1}{CL} = 1 \end{cases}$$

とすれば，$P(s)$ は 2 次遅れ要素の標準形

$$P(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

で表すことができる．

問題 **2.10** の解答 **(MATLAB)**

Command Window で以下のように入力すると，伝達関数

$$P(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{4s^4 + 5s^3 + s^2 + s + 5}$$

を MATLAB で定義し，$P(s)$ の極，零点を求めることができる．

```
》 sysP = tf([1 2 3],[4 5 1 1 5]) ↵ ..... P(s) の定義

Transfer function:
       s^2 + 2 s + 3
---------------------------
4 s^4 + 5 s^3 + s^2 + s + 5

》 pole(sysP) ↵ ..... P(s) の極
ans =
  -1.1043 + 0.5935i
  -1.1043 - 0.5935i
   0.4793 + 0.7521i
   0.4793 - 0.7521i
》 tzero(sysP) ↵ ..... P(s) の零点
ans =
  -1.0000 + 1.4142i
  -1.0000 - 1.4142i
```

したがって，$P(s)$ の極は $-1.1043 \pm 0.5935j,\ 0.4793 \pm 0.7521j$，零点は $-1.0000 \pm 1.4142j$ である．

なお，MATLAB Ver.5.3 (リリース 11) 以降では，以下のように入力して $P(s)$ の定義してもよい．

```
》 s = tf('s'); ↵ ..... ラプラス演算子 s の定義
》 sysP = (s^2 + 2*s + 3)/(4*s^4 + 5*s^3 + s^2 + s + 5) ↵ ..... P(s) の定義

Transfer function:
       s^2 + 2 s + 3
---------------------------
4 s^4 + 5 s^3 + s^2 + s + 5
```

問題 2.11 の解答 (MATLAB)

本書の例 **2.2** (本書の 12 頁) で示した RCL 回路の伝達関数

$$P(s) = \frac{1}{CLs^2 + RCs + 1}$$

を MATLAB で定義し，その極を求める M ファイル

```
% RCLtrans.m
% RCL 回路のモデルの伝達関数表現
```

```
clear;                          % メモリ上のデータを消去
format compact;                 % 表示の省スペース化

% RCL 回路のパラメータ
R = 290;                        % 抵抗
C = 1*10^(-6);                  % 静電容量
L = 100*10^(-3);                % インダクタンス

% 伝達関数表現
numP = 1;                       % P(s) の分子
denP = [ C*L  R*C  1 ];         % P(s) の分母
sysP = tf(numP,denP)            % P(s) の定義

sysP = tf(zpk(sysP))            % 分母の最高次の係数を 1 にする

pole(sysP)                      % P(s) の極
```

を作成し，Command Window で実行すると，

```
》 RCLtrans ↵ ..... RCLtrans.m の実行
Transfer function:..... P(s) = 1 / (CLs^2 + RCs + 1)
            1
--------------------------
1e-007 s^2 + 0.00029 s + 1

Transfer function:..... P(s) の分母の s^2 の係数を 1 にした場合
       1e007
--------------------
s^2 + 2900 s + 1e007

ans =..... P(s) の極
  1.0e+003 *
  -1.4500 + 2.8102i
  -1.4500 - 2.8102i
```

となる．したがって，伝達関数は

$$P(s) = \frac{10^7}{s^2 + 2900s + 10^7}$$

であり，その極は $-1450 \pm 2810.2j$ である．

第3章

3 章の解答

問題 3.1 の解答

(1) 信号

$$f(t) = e^{-at} \ (t \geq 0)$$

のラプラス変換 $f(s) = \mathcal{L}\big[f(t)\big]$ は定義式

$$f(s) = \mathcal{L}\big[f(t)\big] = \int_0^\infty f(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

より

$$\begin{aligned} f(s) = \mathcal{L}\big[e^{-at}\big] &= \int_0^\infty e^{-a\tau} e^{-s\tau} d\tau = \int_0^\infty e^{-(s+a)\tau} d\tau \\ &= \left[-\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)\tau} \right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{s+a} \ (\mathrm{Re}\big[s\big] > -a) \ \longleftarrow \ \mathrm{Re}\big[s+a\big] > 0 \end{aligned}$$

となる．

(2) 信号

$$f(t) = te^{-at} \ (t \geq 0)$$

のラプラス変換 $f(s) = \mathcal{L}\big[f(t)\big]$ は定義式より

$$\begin{aligned} f(s) = \mathcal{L}\big[te^{-at}\big] &= \int_0^\infty \tau e^{-a\tau} e^{-s\tau} d\tau = \int_0^\infty \tau e^{-(s+a)\tau} d\tau \\ &= \int_0^\infty \tau \left\{ -\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)\tau} \right\}' d\tau \ \longleftarrow \ \boxed{\text{部分積分を利用}} \\ &= \left[\tau \times \left\{ -\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)\tau} \right\} \right]_0^\infty - \int_0^\infty \tau' \left\{ -\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)\tau} \right\} d\tau \\ &= -\frac{1}{s+a} \left[\tau e^{-(s+a)\tau} \right]_0^\infty + \frac{1}{s+a} \int_0^\infty e^{-(s+a)\tau} d\tau \end{aligned}$$

である．ここで，$\mathrm{Re}\big[s\big] > -a$ のとき，

$$\lim_{\tau \to 0} \tau e^{-(s+a)\tau} = 0, \ \lim_{\tau \to \infty} \tau e^{-(s+a)\tau} = 0$$

であり，また，問題 3.1 (1) より

$$\int_0^\infty e^{-(s+a)\tau}d\tau = \frac{1}{s+a}$$

であるから，

$$f(s) = \mathcal{L}\left[te^{-at}\right] = \frac{1}{(s+a)^2}$$

となる．

(3)　信号

$$f(t) = \sin\omega t \ (t \geq 0)$$

は，オイラーの公式

$$\left\{\begin{array}{l} e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \\ e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta \end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j} \end{array}\right.$$

を利用すると，

$$f(t) = \sin\omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

と表すことができる．したがって，ラプラス変換 $f(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right]$ は定義式より

$$\begin{aligned} f(s) = \mathcal{L}\left[\sin\omega t\right] &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right] \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau}}{2j} e^{-s\tau}d\tau \\ &= \frac{1}{2j}\int_0^\infty \left\{e^{-(s-j\omega)\tau} - e^{-(s+j\omega)\tau}\right\}d\tau \\ &= \frac{1}{2j}\left[-\frac{1}{s-j\omega}e^{-(s-j\omega)\tau} + \frac{1}{s+j\omega}e^{-(s+j\omega)\tau}\right]_0^\infty \end{aligned}$$

ここで，$\mathrm{Re}\left[s\right] > 0$ のとき，

$$\lim_{\tau\to\infty} e^{-(s-j\omega)\tau} = 0, \quad \lim_{\tau\to\infty} e^{-(s+j\omega)\tau} = 0$$

より $\sin\omega t$ のラプラス変換は以下のようになる．

$$\begin{aligned} f(s) = \mathcal{L}\left[\sin\omega t\right] &= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega}\right) \\ &= \frac{1}{2j} \times \frac{s+j\omega-(s-j\omega)}{(s-j\omega)(s+j\omega)} = \frac{1}{2j} \times \frac{2\omega j}{s^2+\omega^2} \\ &= \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \end{aligned}$$

問題 3.2 の解答

(1) $f(t) = 3 - e^{-2t} + 2e^{t}$ のラプラス変換は

$$\begin{aligned} f(s) = \mathcal{L}\big[f(t)\big] &= \mathcal{L}\big[3\big] - \mathcal{L}\big[e^{-2t}\big] + \mathcal{L}\big[2e^{t}\big] \\ &= 3 \times \mathcal{L}\big[1\big] - \mathcal{L}\big[e^{-2t}\big] + 2 \times \mathcal{L}\big[e^{t}\big] \\ &= 3 \times \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} + 2 \times \frac{1}{s-1} \\ &= \frac{3}{s} - \frac{1}{s+2} + \frac{2}{s-1} \end{aligned}$$

である．

(2) $f(t) = t + t^2 + t^3$ のラプラス変換は

$$\begin{aligned} f(s) = \mathcal{L}\big[f(t)\big] &= \mathcal{L}\big[t\big] + \mathcal{L}\big[t^2\big] + \mathcal{L}\big[t^3\big] \\ &= \mathcal{L}\big[t\big] + 2! \times \mathcal{L}\left[\frac{t^2}{2!}\right] + 3! \times \mathcal{L}\left[\frac{t^3}{3!}\right] \\ &= \frac{1}{s^2} + 2! \times \frac{1}{s^3} + 3! \times \frac{1}{s^4} = \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^4} \end{aligned}$$

である．

(3) $f(t) = 2\sin 3t + \cos 2t$ のラプラス変換は

$$\begin{aligned} f(s) = \mathcal{L}\big[f(t)\big] &= \mathcal{L}\big[2\sin 3t\big] + \mathcal{L}\big[\cos 2t\big] \\ &= 2 \times \mathcal{L}\big[\sin 3t\big] + \mathcal{L}\big[\cos 2t\big] \\ &= 2 \times \frac{3}{s^2 + 3^2} + \frac{s}{s^2 + 2^2} = \frac{6}{s^2 + 9} + \frac{s}{s^2 + 4} \end{aligned}$$

である．

(4) $f(t) = 1 - e^{-3t}\cos 3t$ のラプラス変換は

$$\begin{aligned} f(s) = \mathcal{L}\big[f(t)\big] &= \mathcal{L}\big[1\big] - \mathcal{L}\big[e^{-3t}\cos 3t\big] \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s+3}{(s+3)^2 + 1^2} = \frac{1}{s} - \frac{s+3}{s^2 + 6s + 10} \end{aligned}$$

である．

(5) $f(t) = 3t^2 e^{-2t}$ のラプラス変換は

$$\begin{aligned} f(s) = \mathcal{L}\big[f(t)\big] &= \mathcal{L}\big[3t^2 e^{-2t}\big] \\ &= 3 \times \mathcal{L}\big[t^2 e^{-2t}\big] = 3 \times 2! \times \mathcal{L}\left[\frac{t^2}{2!} e^{-2t}\right] \\ &= 3 \times 2! \times \frac{1}{(s+2)^3} = \frac{6}{(s+2)^3} \end{aligned}$$

である．

(6) $f(t) = e^{-2t}(\sin 3t + \cos 3t)$ のラプラス変換は

$$f(s) = \mathcal{L}\big[f(t)\big] = \mathcal{L}\big[e^{-2t}\sin 3t\big] + \mathcal{L}\big[e^{-2t}\cos 3t\big]$$
$$= \frac{3}{(s+2)^2+3^2} + \frac{s+2}{(s+2)^2+3^2} = \frac{s+5}{s^2+4s+13}$$

である．

問題 3.3 の解答

(1) ラプラス変換表 (表 **3.1**) の $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s+a}\right] = e^{-at}$, $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s}\right] = 1$ より

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s+2} + \frac{2}{s}\right] = 3\times\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] + 2\times\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]$$
$$= 3e^{-2t} + 2 \ (t \geq 0)$$

(2) ラプラス変換表 (表 **3.1**) の $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s+a)^{n+1}}\right] = \dfrac{t^n}{n!}e^{-at}$ より

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^3}\right] = \frac{t^2}{2!}e^{-t} \ (t \geq 0)$$

(3) ラプラス変換表 (表 **3.1**) の

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+\omega^2}\right] = \cos\omega t, \ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right] = \sin\omega t$$

より

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{s^2+25}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{s^2+5^2}\right]$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+5^2}\right] + \frac{1}{5}\times\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5}{s^2+5^2}\right]$$
$$= \cos 5t + \frac{1}{5}\sin 5t \ (t \geq 0)$$

(4) ラプラス変換表 (表 **3.1**) の

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}\right] = e^{-at}\cos\omega t$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}\right] = = e^{-at}\sin\omega t$$

より

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s+5}{s^2+2s+5}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s+5}{(s+1)^2+2^2}\right] \\
&= 2\times\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{(s+1)^2+2^2}\right] \\
&= 2\times\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}\right] + \frac{3}{2}\times\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+1)^2+2^2}\right] \\
&= 2e^{-t}\cos 2t + \frac{3}{2}e^{-t}\sin 2t \ \ (t \geq 0)
\end{aligned}
$$

問題 3.4 の解答

(1) $y(s) = P(s)\dfrac{1}{s}$ を部分分数分解すると，

$$
y(s) = \frac{3}{s+2}\times\frac{1}{s} = \frac{3}{s(s+2)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+2}
$$

という形式になる．ここで，

$$
k_1 = sy(s)|_{s=0} = \left.\frac{3}{s+2}\right|_{s=0} = \frac{3}{2}
$$

$$
k_2 = (s+2)y(s)|_{s=-2} = \left.\frac{3}{s}\right|_{s=-2} = -\frac{3}{2}
$$

より

$$
y(s) = \frac{3}{2}\times\frac{1}{s} - \frac{3}{2}\times\frac{1}{s+2}
$$

であるから，ステップ応答 $y(t)$ が次式のように求まる．

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\big[y(s)\big] = \frac{3}{2}\times\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \frac{3}{2}\times\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] \\
&= \frac{3}{2} - \frac{3}{2}e^{-2t} = \frac{3}{2}(1-e^{-2t}) \ \ (t \geq 0)
\end{aligned}
$$

(2) $y(s) = P(s)\dfrac{1}{s}$ を部分分数分解すると，

$$
\begin{aligned}
y(s) &= \frac{s+4}{(s+1)(s+2)}\times\frac{1}{s} = \frac{s+4}{s(s+1)(s+2)} \\
&= \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+1} + \frac{k_3}{s+2}
\end{aligned}
$$

という形式になる．ここで，

$$k_1 = sy(s)|_{s=0} = \left.\frac{s+4}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=0} = 2$$

$$k_2 = (s+1)y(s)|_{s=-1} = \left.\frac{s+4}{s(s+2)}\right|_{s=-1} = -3$$

$$k_3 = (s+2)y(s)|_{s=-2} = \left.\frac{s+4}{s(s+1)}\right|_{s=-2} = 1$$

より

$$y(s) = 2\times\frac{1}{s} - 3\times\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

であるから，ステップ応答 $y(t)$ が次式のように求まる．

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[y(s)\right] \\ &= 2\times\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - 3\times\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] \\ &= 2 - 3e^{-t} + e^{-2t}\ (t\geq 0) \end{aligned}$$

(3) $y(s) = P(s)\dfrac{1}{s}$ を部分分数分解すると，

$$y(s) = \frac{2}{(s+1)^2}\times\frac{1}{s} = \frac{2}{s(s+1)^2} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_{21}}{s+1} + \frac{k_{22}}{(s+1)^2}$$

という形式になる．ここで，

$$k_1 = sy(s)|_{s=0} = \left.\frac{2}{(s+1)^2}\right|_{s=0} = 2$$

$$k_{21} = \left.\frac{d}{ds}(s+1)^2 y(s)\right|_{s=-1} = \left.\frac{d}{ds}\left(\frac{2}{s}\right)\right|_{s=-1}$$

$$= \left.-\frac{2}{s^2}\right|_{s=-1} = -2$$

$$k_{22} = \left.(s+1)^2 y(s)\right|_{s=-1} = \left.\frac{2}{s}\right|_{s=-1} = -2$$

より

$$y(s) = 2\times\frac{1}{s} - 2\times\frac{1}{s+1} - 2\times\frac{1}{(s+1)^2}$$

であるから，ステップ応答 $y(t)$ が次式のように求まる．

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[y(s)\right] \\ &= 2\times\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - 2\times\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] - 2\times\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2}\right] \\ &= 2 - 2e^{-t} - 2te^{-t} = 2(1 - e^{-t} - te^{-t})\ (t\geq 0) \end{aligned}$$

(4) $s^2 + 2s + 5 = 0$ の解は $s = -1 \pm 2j$ であるから，$y(s) = P(s)\dfrac{1}{s}$ を部分

分数分解すると，

$$y(s) = \frac{5}{s^2+2s+5} \times \frac{1}{s} = \frac{5}{s(s^2+2s+5)}$$
$$= \frac{5}{s(s-p_2)(s-p_3)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s-p_2} + \frac{k_3}{s-p_3}$$
$$p_2 = -1+2j,\ p_3 = -1-2j$$

という形式になる．ここで，

$$k_1 = sy(s)|_{s=0} = \left.\frac{5}{s^2+2s+5}\right|_{s=0} = 1$$

$$k_2 = (s-p_2)y(s)|_{s=p_2} = \left.\frac{5}{s(s-p_3)}\right|_{s=p_2} = \frac{5}{p_2(p_2-p_3)}$$
$$= -\frac{5}{4} \times \frac{1}{2+j} = -\frac{2-j}{4}$$

$$k_3 = (s-p_3)y(s)|_{s=p_3} = \left.\frac{5}{s(s-p_2)}\right|_{s=p_3} = \frac{5}{p_3(p_3-p_2)}$$
$$= -\frac{5}{4} \times \frac{1}{2-j} = -\frac{2+j}{4}$$

より

$$y(s) = \frac{1}{s} + k_2 \times \frac{1}{s-p_2} + k_3 \times \frac{1}{s-p_3}$$

であるから，

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\big[y(s)\big]$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + k_2 \times \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-p_2}\right] + k_3 \times \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-p_3}\right]$$
$$= 1 + k_2 e^{p_2 t} + k_3 e^{p_3 t}$$
$$= 1 - \frac{2-j}{4} e^{-(1-2j)t} - \frac{2+j}{4} e^{-(1+2j)t}$$
$$= 1 - \frac{2-j}{4} e^{-t} e^{2jt} - \frac{2+j}{4} e^{-t} e^{-2jt}$$
$$= 1 - \frac{1}{4} e^{-t}\big\{(2-j)e^{2jt} + (2+j)e^{-2jt}\big\}\ (t \geq 0)$$

となる．ここで，オイラーの公式より

$$e^{2jt} = \cos 2t + j\sin 2t,\ e^{-2jt} = \cos 2t - j\sin 2t$$

であるから，

$$(2-j)e^{2jt} + (2+j)e^{-2jt} = (2-j)(\cos 2t + j\sin 2t)$$
$$+(2+j)(\cos 2t - j\sin 2t)$$
$$= 4\cos 2t + 2\sin 2t$$

となり，ステップ応答 $y(t)$ が次式のように求まる．

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 - \frac{1}{4}e^{-t}\left\{(2-j)e^{2jt} + (2+j)e^{-2jt}\right\} \\ &= 1 - \frac{1}{4}e^{-t}(4\cos 2t + 2\sin 2t) \\ &= 1 - e^{-t}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) \quad (t \geq 0) \end{aligned}$$

問題 3.5 の解答

安定なシステム $y(s) = P(s)u(s)$ のステップ応答 $y(t)$ の定常値 $y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t)$ が $y_\infty = P(0)$ により求まることを利用する（最終値の定理より）．

(1) $\quad y_\infty = P(0) = \left.\dfrac{s+1}{s+2}\right|_{s=0} = \dfrac{1}{2}$

(2) $\quad y_\infty = P(0) = \left.\dfrac{2}{(s+1)^{10}}\right|_{s=0} = 2$

問題 3.6 の解答

1 次遅れ系

$$y(s) = P(s)u(s), \ P(s) = \frac{K}{1+Ts}$$

のインパルス応答は，$u(t) = \delta(t)$ $(u(s) = 1)$ としたときの $y(t)$ であるから，

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[y(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[P(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{1+Ts}\right] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\dfrac{K}{T}}{s+\dfrac{1}{T}}\right] = \frac{K}{T}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+\dfrac{1}{T}}\right] \\ &= \frac{K}{T}\exp\left(-\frac{1}{T}t\right) \quad (t \geq 0) \end{aligned}$$

となる．したがって，初期値 $y(0) = \dfrac{K}{T}$ から指数関数的に $y_\infty = \lim_{t\to\infty} = 0$ に近づく．

問題 3.7 の解答

(1) $\quad$ RL 回路（図 **3.11**）の回路方程式は

$$e(t) = L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t)$$

である．ここで，$u(t) = e(t),\ y(t) = i(t)$ とし，ラプラス変換すると，

$$u(t) = L\dot{y}(t) + Ry(t)$$
$$\longrightarrow \quad u(s) = Lsy(s) + Ry(s) = (Ls + R)y(s)$$

となる．したがって，$u(s)$ から $y(s)$ への伝達関数 $P(s)$ は以下のようになる．

$$P(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{Ls + R} = \frac{\dfrac{1}{L}}{1 + \dfrac{R}{L}s}$$
$$= \frac{K}{1 + Ts},\ T = \frac{L}{R},\ K = \frac{1}{R}$$

よって，伝達関数 $P(s)$ は 1 次遅れ要素であり，時定数は $T = \dfrac{R}{L}$ である．

(2)　スイッチを OFF から ON に切り替えたときの時間を 0 [s] とすると，入力電圧 $u(t) = e(t)$ は

$$u(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ E_0 & (t \geq 0) \end{cases}$$

であるから，そのラプラス変換は $u(s) = \dfrac{E_0}{s}$ となる．したがって，ステップ状の電圧 $u(t) = e(t)$ が加わった後の電流 $y(t) = i(t)$ は

$$y(s) = P(s)u(s) = \frac{K}{1 + Ts} \times \frac{E_0}{s} = \frac{E_0 K}{s(1 + Ts)}$$

の逆ラプラス変換により求まり，

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\big[y(s)\big] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{E_0 K}{s(1 + Ts)}\right]$$
$$= E_0 K\mathcal{L}^{-1}\left[\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + (1/T)}\right)\right]$$
$$= E_0 K\big(1 - e^{-t/T}\big)$$
$$= \frac{E_0}{R}\big(1 - e^{-Rt/L}\big)\ (t \geq 0)$$

となる．

(3)　“$R \to$ 大” とすると “$T = \dfrac{L}{R} \to$ 小” であるから，立ち上がり時間は短くなる (小さくなる)．

一方，“$L \to$ 大” とすると “$T = \dfrac{L}{R} \to$ 大” であるから，立ち上がり時間は長くなる (大きくなる)．

問題 **3.8** の解答

図 **3.12** のステップ応答の定常値 $y_\infty = P(0) = K$ および定常値 y_∞ の 63.2 [%] に至るまでの時間 T を

$$T = \frac{L}{R} = 0.004,\ \ K = \frac{1}{R} = 0.02$$

のように読みとることができる．したがって，

$$R = \frac{1}{K} = \frac{1}{0.02} = 50\ [\Omega]$$
$$L = RT = 50 \times 0.004 = 0.2\ [\mathrm{H}]$$

と定まる．

問題 **3.9** の解答

問題 **2.2** より $u(s) = v_{in}(s)$ から $y(s) = q(s)$ への伝達関数 $P(s)$ は

$$P(s) = \frac{C}{CLs^2 + RCs + 1} = \frac{\dfrac{1}{L}}{s^2 + \dfrac{R}{L}s + \dfrac{1}{CL}}$$

であるから，

$$\begin{cases} 2\zeta\omega_n = \dfrac{R}{L} \\ \omega_n^2 = \dfrac{1}{CL} \\ K\omega_n^2 = \dfrac{1}{L} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \omega_n = \dfrac{1}{\sqrt{CL}} \\ \zeta = \dfrac{1}{2\omega_n} \times \dfrac{R}{L} = \dfrac{\sqrt{CL}}{2} \times \dfrac{R}{L} = \dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L}} \\ K = \dfrac{1}{\omega_n^2} \times \dfrac{1}{L} = CL \times \dfrac{1}{L} = C \end{cases}$$

とすれば，$P(s)$ は 2 次遅れ要素の標準形

$$P(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

で表すことができる．2 次遅れ系がオーバーシュートを生じないのは $\zeta \geq 1$ のときであるから，このような抵抗 R の範囲は

$$\zeta = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} \geq 1 \quad \longrightarrow \quad R \geq 2\sqrt{\frac{C}{L}}$$

である．

問題 **3.10** の解答

(1)　問題 **2.6** よりばね・ダンパ系の伝達関数は

$$P(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{Ms^2 + cs + k} = \frac{\dfrac{1}{M}}{s^2 + \dfrac{c}{M}s + \dfrac{k}{M}}$$

$$u(t) = f(t),\ y(t) = z(t),\ c = c_1 + c_2$$

である．したがって，

$$\begin{cases} 2\zeta\omega_n = \dfrac{c}{M} \\ \omega_n^2 = \dfrac{k}{M} \\ K\omega_n^2 = \dfrac{1}{M} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \omega_n = \sqrt{\dfrac{k}{M}} \\ \zeta = \dfrac{1}{2\omega_n} \times \dfrac{c}{M} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{M}{k}} \times \dfrac{c}{M} = \dfrac{c}{2\sqrt{Mk}} \\ K = \dfrac{1}{\omega_n^2} \times \dfrac{1}{M} = \sqrt{\dfrac{M}{k}} \times \dfrac{1}{M} = \dfrac{1}{k} \end{cases}$$

とすれば，$P(s)$ は 2 次遅れ要素の標準形

$$P(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

で表すことができる．

(2)　最終値の定理より 2 次遅れ系のステップ応答の定常値 $y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t)$ が $y_\infty = P(0) = K$ により求まる．図 **3.15** より $y_\infty = 0.04$ であるから，

$$K = y_\infty = 0.04$$

である．

つぎに，$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ を定める．図 **3.15** より $T_p = 0.5$ であるから，(3.60) 式

$$\boxed{\text{ピーク時間}}:\ T_p = \frac{\pi}{\omega_d},\ \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

より ω_d を定めると，

$$\omega_d = \frac{\pi}{T_p} = \frac{\pi}{0.5} \cong 6.28$$

である．

最後に，$\xi = \zeta\omega_n$ を定める．図 **3.15** より $T_p = 0.5,\ y_{max} = 0.05,\ A_{max} = y_{max} - y_\infty = 0.01$ であるから，(3.61) 式より

最大ピーク値： $y_{max} = y(T_p) = K\left(1 + e^{-\zeta\omega_n T_p}\right)$

$\longrightarrow$ オーバーシュート： $A_{max} = y_{max} - y_\infty = Ke^{-\zeta\omega_n T_p}$

$$\longrightarrow \quad e^{-\zeta\omega_n T_p} = \frac{A_{max}}{K}$$

$$\longrightarrow \quad -\zeta\omega_n T_p = \log_e \frac{A_{max}}{K}$$

$$\longrightarrow \quad \xi = \zeta\omega_n = -\frac{1}{T_p}\log_e \frac{A_{max}}{K} = -\frac{1}{T_p}\log_e \frac{y_{max} - y_\infty}{y_\infty}$$

$$= -\frac{1}{0.5}\log_e \frac{0.01}{0.05} \cong 2.77$$

のように定まる．

(3) ω_d, ξ から ζ, ω_n を定めると，

$$\begin{cases} \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \\ \xi = \zeta\omega_n \end{cases}$$

$$\longrightarrow \quad \begin{cases} \omega_n = \sqrt{\omega_d^2 + (\zeta\omega_n)^2} = \sqrt{\omega_d^2 + \xi^2} \cong 6.87 \\ \zeta = \dfrac{\xi}{\omega_n} \cong 0.404 \end{cases}$$

となる．また，ζ, ω_n, K から M, k, c を定めると，

$$\begin{cases} 2\zeta\omega_n = \dfrac{c}{M} \\ \omega_n^2 = \dfrac{k}{M} \\ K\omega_n^2 = \dfrac{1}{M} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} M = \dfrac{1}{K\omega_n^2} \cong 0.530 \\ k = M\omega_n^2 \cong 25 \\ c = 2M\zeta\omega_n \cong 2.94 \end{cases}$$

となる．

問題 3.11 の解答

(1) 極は $(s+1)(s+2) = 0$ の根であるから，$s = -1,\ -2$ であり，共に安定極である．したがって，システム $y(s) = P(s)u(s)$ は安定である．

(2) 極は $(s-1)(s+2) = 0$ の根であるから，$s = 1,\ -2$ であり，不安定極 1 が含まれる．したがって，システム $y(s) = P(s)u(s)$ は不安定である．

(3) 極は $s^2 - 2s + 2 = 0$ の根であるから，$s = 1 \pm j$ であり，共に不安定極である．したがって，システム $y(s) = P(s)u(s)$ は不安定である．

(4) 極は $(s+1)(s^2+2s+2) = 0$ の根であるから，$s = -1,\ -1 \pm j$ であり，共に安定極である．したがって，システム $y(s) = P(s)u(s)$ は安定である．

問題 3.12 の解答 (MATLAB)

伝達関数 $P(s) = \dfrac{1}{s+1}$ において，$y(s) = P(s)\dfrac{1}{s}$ は

$$y(s) = P(s)\frac{1}{s} = \frac{1}{s+1} \times \frac{1}{s} = \frac{k_1}{s-p_1} + \frac{k_2}{s-p_2}$$

という形式になる．ただし，$p_1 = -1$, $p_2 = 0$ である．また，ステップ応答 $y(t)$ は

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[P(s)\frac{1}{s}\right] = k_1 e^{p_1 t} + k_2 e^{p_2 t}$$

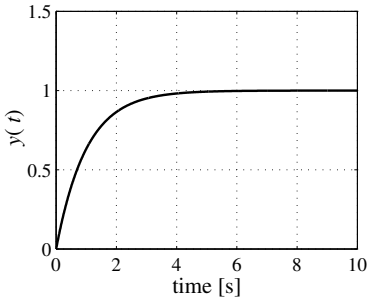
により求まるため，ステップ応答を得るためには，以下の M ファイル step_response.m を作成すればよい．

```
% step_response.m
% 部分分数分解によるステップ応答

clear;                          % メモリ上のデータを消去
format compact;                 % 表示の省スペース化

sysP = tf([1],[1 1]);           % P(s) = 1/(s + 1)
t = 0:0.01:10;

us = tf([1],[1 0]);                         % ステップ入力 u(s) = 1/s
ys = sysP*us;                               % y(s) = P(s)u(s)
[numY, denY] = tfdata(ys,'v')               % y(s) = ny(s)/dy(s)

[k,p] = residue(numY,denY)                  % y(s) の部分分数分解
y  = k(1)*exp(p(1)*t) + k(2)*exp(p(2)*t);   % y(t)

figure(1); plot(t,y)                        % Figure No.1 にステップ応答を描画
xlabel('time [s]'); ylabel('y(t)'); grid
axis([0 10 0 10])
```

M ファイル step_response.m を Command Window で実行すると，以下のようになる．

```
》 step_response ↵  ..... step_response.m の実行
numY = ..... y(s) = P(s)1/s の分子 n_y(s)
     0     0     1
denY = ..... y(s) = P(s)1/s の分母 d_y(s)
     1     1     0
k = ..... 部分分数分解したときの係数
    -1 ..... k_1 = -1
     1 ..... k_2 = 1
p = ..... d_y(s) = 0 の根
```

```
-1 ..... p1 = -1
 0 ..... p2 = 0
```



一方，伝達関数 $P(s) = \dfrac{1}{s+1}$ において，$y(s) = P(s)\dfrac{1}{s^2}$ は

$$y(s) = P(s)\frac{1}{s^2} = \frac{1}{s+1} \times \frac{1}{s^2} = \frac{k_1}{s-p_1} + \frac{k_{21}}{s-p_2} + \frac{k_{22}}{(s-p_2)^2}$$

という形式になる．ただし，$p_1 = -1,\ p_2 = 0$ である．また，ランプ応答 $y(t)$ は

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[P(s)\frac{1}{s}\right] = k_1 e^{p_1 t} + k_{21} e^{p_2 t} + k_{22} t e^{p_2 t}$$

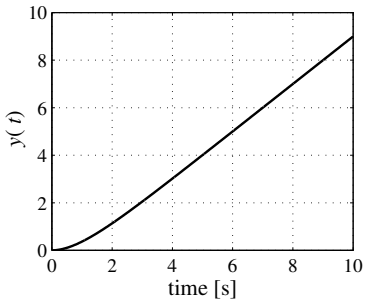
により求まるため，ランプ応答を得るためには，以下の M ファイル `lump_response.m` を作成すればよい．

```
% lump_response.m
% 部分分数分解によるランプ応答

clear;                          % メモリ上のデータを消去
format compact;                 % 表示の省スペース化

sysP = tf([1],[1 1]);           % P(s) = 1/(s + 1)
t = 0:0.01:10;

us = tf([1],[1 0 0]);                       % ランプ入力 u(s) = 1/s^2
ys = sysP*us;                               % y(s) = P(s)u(s)
[numY, denY] = tfdata(ys,'v')               % y(s) = ny(s)/dy(s)

[k,p] = residue(numY,denY)                  % y(s) の部分分数分解
y  = k(1)*exp(p(1)*t) + k(2)*exp(p(2)*t) + k(3)*t.*exp(p(3)*t);    %y(t)

figure(2); plot(t,y)                        % Figure No.2 にランプ応答を描画
xlabel('time [s]'); ylabel('y(t)'); grid
```

```
axis([0 10 0 10])
```

M ファイル lump_response.m を Command Window で実行すると，以下のようになる．

```
》 lump_response ↵ ..... lump_response.m の実行
numY = ..... y(s) = P(s)1/s^2 の分子 n_y(s)
     0     0     0     1
denY = ..... y(s) = P(s)1/s^2 の分母 d_y(s)
     1     1     0     0
k = ..... 部分分数分解したときの係数
     1 ..... k_1 = 1
    -1 ..... k_21 = -1
     1 ..... k_22 = 1
p = ..... d_y(s) = 0 の根
    -1 ..... p_1 = -1
     0 ..... p_2 = 0
     0 ..... p_2 = 0
```



問題 3.13 の解答 (MATLAB)

伝達関数 $P(s)$ が

(1) $P(s) = \dfrac{3}{s+2}$　　(2) $P(s) = \dfrac{s+4}{(s+1)(s+2)}$

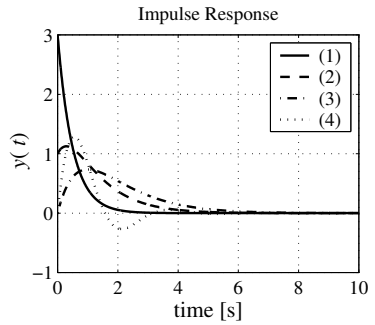
(3) $P(s) = \dfrac{2}{(s+1)^2}$　　(4) $P(s) = \dfrac{5}{s^2+2s+5}$

であるとき，システム $y(s) = P(s)u(s)$ のインパルス応答，ステップ応答，ランプ応答を MATLAB により描くには，たとえば，以下の M ファイル time_response.m を作成し，実行すればよい．

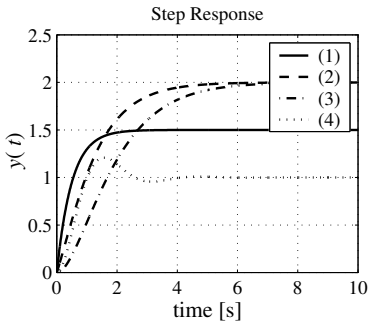
```
% time_response.m
% インパルス応答，ステップ応答，インパルス応答

clear;                          % メモリ上のデータを消去
format compact;                 % 表示の省スペース化

t = 0:0.01:10;

sysP1 = tf([3],[1 2]);                  % P(s) = 3/(s + 2)
sysP2 = tf([1 4],[1 1])*tf([1],[1 2]);  % P(s) = (s + 4)/(s+ 1)(s + 2)
sysP3 = tf([2],[1 1])*tf([1],[1 1]);    % P(s) = 2/(s + 1)^2
sysP4 = tf([5],[1 2 5]);                % P(s) = 5/(s^2 + 2s + 5)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% インパルス応答
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
y1 = impulse(sysP1,t);
y2 = impulse(sysP2,t);
y3 = impulse(sysP3,t);
y4 = impulse(sysP4,t);

figure(1); plot(t,y1,'r-',t,y2,'g--',t,y3,'b-.',t,y4,'m:')
xlabel('time [s]'); ylabel('y(t)'); grid
axis([0 10 -1 3])
legend('(1)','(2)','(3)','(4)')
title('Impulse Response')

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% ステップ応答
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
y1 = step(sysP1,t);
y2 = step(sysP2,t);
y3 = step(sysP3,t);
y4 = step(sysP4,t);

figure(2); plot(t,y1,'r-',t,y2,'g--',t,y3,'b-.',t,y4,'m:')
xlabel('time [s]'); ylabel('y(t)'); grid
axis([0 10 0 2.5])
legend('(1)','(2)','(3)','(4)')
title('Step Response')

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% ランプ応答
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
u = t;
```

```
y1 = lsim(sysP1,u,t);
y2 = lsim(sysP2,u,t);
y3 = lsim(sysP3,u,t);
y4 = lsim(sysP4,u,t);

figure(3); plot(t,y1,'r-',t,y2,'g--',t,y3,'b-.',t,y4,'m:')
xlabel('time [s]'); ylabel('y(t)'); grid
axis([0 10 0 10])
legend('(1)','(2)','(3)','(4)')
title('Lump Response')
```

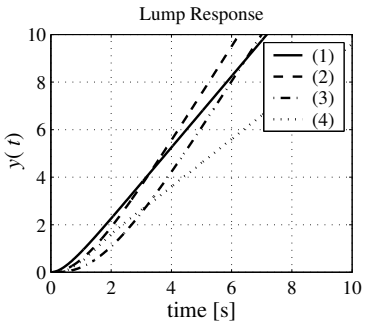
M ファイル time_response.m の実行結果を以下に示す．



(a) インパルス応答



(b) ステップ応答



(c) ランプ応答

解答図

なお，M ファイル time_response.m において，sysP1, sysP2, sysP3, sysP4 は

```
z1 = [];   p1 = [-2];          k1 = [1]; sysP1 = zpk(z1,p1,k1);
z2 = [-4]; p2 = [-1; -2];      k2 = [1]; sysP2 = zpk(z2,p2,k2);
```

```
z3 = [];   p3 = [-1; -1];       k3 = [2]; sysP3 = zpk(z3,p3,k3);
z4 = [];   p4 = [-1+2j; -1-2j]; k4 = [5]; sysP4 = zpk(z4,p4,k4);
```

やあるいは MATLAB Ver.5.3.x (リリース 11.x) 以降のバージョンであれば

```
s = tf('s');
sysP1 = 1/(s + 2);
sysP2 = (s + 4)/(s + 1)(s + 2);
sysP3 = 2/(s + 1)^2;
sysP4 = 5/(s^2 + 2*s + 5);
```

と定義してもよい．

問題 3.14 の解答 (MATLAB)

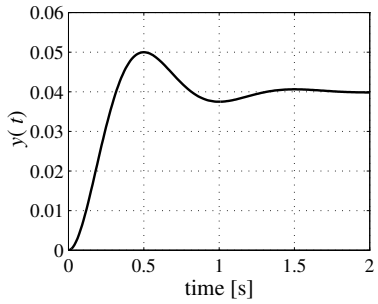
本書の問題 **3.10** (本書の 50 頁) で示したばね・ダンパ系のパラメータ同定手順を MATLAB で表すと，M ファイル `identification.m` のようになる．

```
% identification.m
% ばね・ダンパ系のパラメータ同定

clear;                          % メモリ上のデータを消去
format compact;                 % 表示の省スペース化

ymax = 0.05;                    % y(t) の最大ピーク値 y_max = 0.05
yinf = 0.04;                    % y(t) の定常値 y_∞ = 0.04
Tp = 0.5;                       % ピーク時間 T_p = 0.5
Amax = ymax - yinf;             % オーバーシュート A_max = y_max - y_∞

K = yinf;                       % K = y_∞
omegad = pi/Tp;                 % ω_d = π/T_p
xi  = - (1/Tp)*log(Amax/K);     % ξ = -(1/T_p) log_e (A_max/K)

omegan = sqrt(omegad^2 + xi^2)  % 固有角周波数 ω_n = sqrt(ω_d^2 + ξ^2)
zeta   = xi/omegan              % 減衰係数 ζ = ξ/ω_n

k = 1/K                         % ばね係数の決定 k = 1/K
M = k/omegan^2                  % 質量の決定 M = k/ω_n^2
c = 2*zeta*omegan*M             % c = c_1 + c_2 = 2ζω_n M の決定
                                % (c_1：ダンパ係数，c_2：粘性摩擦係数)
sysP = tf([1],[M c k]);         % 伝達関数 P(s) = 1/(Ms^2 + cs + k) の定義

t = 0:0.01:2;
y = step(sysP,t);               % ステップ応答
```

```
figure(1); plot(t,y)              % Figure No.1 にステップ応答を描画
xlabel('time [s]'); ylabel('y(t)'); grid
axis([0 2 0 0.06]);
```

M ファイル identification.m を実行した結果を以下に示す．この結果から，パラメータ同定により求まった伝達関数 $P(s) = 1/(Ms^2 + cs + k)$ のステップ応答が $y_{max} = 0.05$ [m], $y_\infty = 0.04$ [m], $T_p = 0.5$ [s] となっていることが確認できる．

```
》 identification ↵ ..................................... identification.m の実行
omegan = ..................................................... 固有角周波数 ωn の決定
    6.8677
zeta = ....................................................... 減衰係数 ζ の決定
    0.4037
k = ..................................................... ばね係数 k の同定値 (k = 25)
    25
M = ..................................................... 質量 M の同定値 (M = 0.5300)
    0.5300
c = ..................................... c = c1 + c2 の同定値 (c = 2.9392)
    2.9392
```



問題 3.15 の解答 (MATLAB)

伝達関数 $P(s)$ が

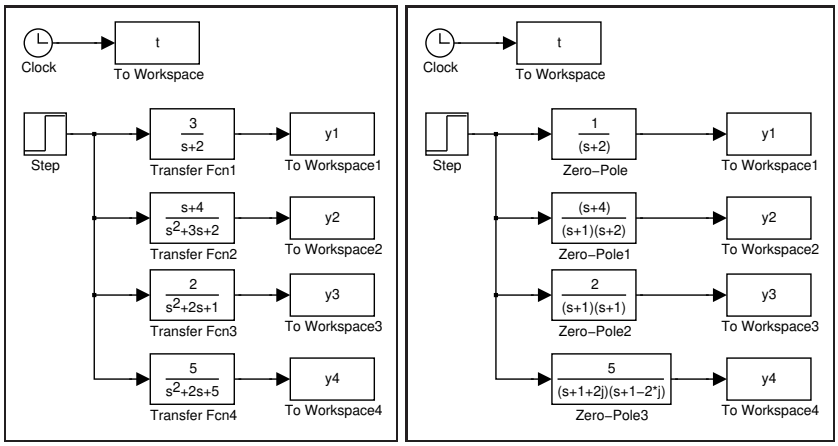
(1) $P(s) = \dfrac{3}{s+2}$

(2) $P(s) = \dfrac{s+4}{(s+1)(s+2)} = \dfrac{s+4}{s^2+3s+2}$

(3) $P(s) = \dfrac{2}{(s+1)^2} = \dfrac{2}{s^2+2s+1}$

(4) $P(s) = \dfrac{5}{s^2+2s+5}$

であるとき，システム $y(s) = P(s)u(s)$ のステップ応答を Simulink によりシミュレーションするためには，たとえば，つぎのシミュレーションモデルを作成すればよい．



ただし，To Workspace (1 - 4) の Save format は Matrix (Array) とする．このとき，シミュレーション終了後，

```
》 plot(t,y1,'r-',t,y2,'g--',t,y3,'b-.',t,y4,'m:') ↵
```

とすれば，ステップ応答のグラフを描くことができる．

第4章

4 章の解答

問題 4.1 の解答

$$
\begin{aligned}
e(s) &= r(s) - y(s) \\
&= r(s) - P(s)(d(s) + C(s)e(s)) \\
\longrightarrow \quad & (1 + P(s)C(s))e(s) = r(s) - P(s)d(s) \\
\longrightarrow \quad & e(s) = \frac{1}{1 + P(s)C(s)} r(s) - \frac{P(s)}{1 + P(s)C(s)} d(s)
\end{aligned}
$$

であるから，$r(s)$ から $e(s)$ への伝達関数 $G_{er}(s)$，$d(s)$ から $e(s)$ への伝達関数 $G_{ed}(s)$ はそれぞれ

$$
G_{er}(s) = \frac{1}{1 + P(s)C(s)}, \; G_{ed}(s) = -\frac{P(s)}{1 + P(s)C(s)}
$$

となる．

また，

$$
\begin{aligned}
u(s) &= C(s)\big\{r(s) - P(s)(d(s) + u(s))\big\} \\
\longrightarrow \quad & (1 + P(s)C(s))u(s) = C(s)r(s) - P(s)C(s)d(s) \\
\longrightarrow \quad & e(s) = \frac{C(s)}{1 + P(s)C(s)} r(s) - \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)} d(s)
\end{aligned}
$$

であるから，$r(s)$ から $u(s)$ への伝達関数 $G_{ur}(s)$，$d(s)$ から $u(s)$ への伝達関数 $G_{ud}(s)$ はそれぞれ

$$
G_{ur}(s) = \frac{C(s)}{1 + P(s)C(s)}, \; G_{ud}(s) = -\frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)}
$$

となる．

問題 4.2 の解答

$P(s) = \dfrac{N_P(s)}{D_P(s)}$, $C(s) = \dfrac{N_C(s)}{D_C(s)}$ としたときの特性方程式

$$
\Delta(s) := D_P(s)D_C(s) + N_P(s)N_C(s) = 0
$$

の根を求め，安定性を判別する．

(1) $N_P(s) = 1$, $D_P(s) = s - 1$, $N_C(s) = 2s + 1$, $D_C(s) = s$ より

$$\Delta(s) = (s-1)\times s + 1\times(2s+1) = s^2 + s + 1$$

であるから，$\Delta(s) = 0$ の根は $s = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}j}{2}$ である．したがって，根の実部は共に負であるから，安定である．

(2) $N_P(s) = 1,\ D_P(s) = (s-1)(s+2),\ N_C(s) = 1,\ D_C(s) = 1$ より

$$\Delta(s) = (s-1)(s+2)\times 1 + 1\times 1 = s^2 + s - 1$$

であるから，$\Delta(s) = 0$ の根は $s = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ である．したがって，実部が正の根 $s = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ が含まれるから，不安定である．

問題 **4.3** の解答

(1) $P(s) = \dfrac{5}{s^2+2s+2},\ C(s) = k_P$ より $N_P(s) = 5,\ D_P(s) = s^2+2s+2,\ N_C(s) = k_P,\ D_C(s) = 1$ であるから，

$$\begin{aligned}\Delta(s) &= (s^2+2s+2)\times 1 + 5\times k_P = s^2 + 2s + 2 + 5k_P \\ &= a_2 s^2 + a_1 s + a_0 \\ a_0 &= 2 + 5k_P,\ a_1 = 2,\ a_2 = 1\end{aligned}$$

である．

(条件 **I**) $\Delta(s)$ の係数がすべて正という条件から，

$$a_0 = 2 + 5k_P > 0,\ a_1 = 2 > 0,\ a_2 = 1 > 0$$
$$\longrightarrow\quad k_P > -\frac{2}{5}$$

である．

(条件 **II**) (4.34) 式の $\boldsymbol{H}$ は

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{bmatrix}$$

であり，2×2 の行列であるから，条件 II は考えなくてよい．

以上より，$k_P > -\dfrac{2}{5}$ であれば，図 **4.3** のフィードバック制御系は安定である．

(2) $P(s) = \dfrac{5}{s^2+2s+2},\ C(s) = \dfrac{k_P s + k_I}{s}$ より $N_P(s) = 5,\ D_P(s) = s^2+2s+2,\ N_C(s) = k_P s + k_I,\ D_C(s) = s$ であるから，

$$\begin{aligned}\Delta(s) &= (s^2+2s+2)\times s + 5\times(k_P s + k_I)\\ &= s^3 + 2s^2 + (2+5k_P)s + 5k_I\\ &= a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0\\ &\quad a_0 = 5k_I,\ a_1 = 2+5k_P,\ a_2 = 2,\ a_3 = 1\end{aligned}$$

である．

(条件 **I**)　$\Delta(s)$ の係数がすべて正という条件から，

$$a_0 = 5k_I > 0,\ a_1 = 2+5k_P > 0,\ a_2 = 2 > 0,\ a_3 = 1 > 0$$

$$\longrightarrow \quad k_P > -\frac{2}{5},\ k_I > 0$$

である．

(条件 **II**)　(4.34) 式の $\boldsymbol{H}$ は

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{bmatrix}$$

であるから，

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} > 0$$

$$\longrightarrow \quad a_1 a_2 - a_0 a_3 = (2+5k_P)\times 2 - 5k_I \times 1 > 0$$

$$\longrightarrow \quad k_I < \frac{2}{5}(2+5k_P)$$

である．

以上より，

$$k_P > -\frac{2}{5},\ 0 < k_I < \frac{2}{5}(2+5k_P)$$

であれば，図 **4.3** のフィードバック制御系は安定である．

問題 **4.4** の解答

(1)　条件 I は問題 4.3 (1) と同じであり，$k_P > -\dfrac{2}{5}$ となる．

(条件 **II**)　ラウス表は

$$\begin{array}{c|ll} s^2 & a_2 & a_0 \\ s^1 & a_1 & \\ s^0 & b_1 = \dfrac{a_1 a_0}{a_1} = a_0 & \end{array}$$

であるから，ラウス数列は $\{a_2,\ a_1,\ b_1\}$ である．したがって，$a_0 = 2+5k_P,\ a_1 = 2,\ a_2 = 1$ よりラウス数列が同符号であるためには，

$$a_2 = 1 > 0,\ a_1 = 2 > 0,\ b_1 = a_0 = 2 + 5k_P > 0$$
$$\longrightarrow \quad k_P > -\frac{2}{5}$$

でなければならない．

以上より，$k_P > -\frac{2}{5}$ であれば，図 **4.3** のフィードバック制御系は安定である．

(2)　条件 I は問題 4.3 (2) と同じであり，$k_P > -\frac{2}{5},\ k_I > 0$ となる．

(条件 **II**)　ラウス表は

s^3	a_3	a_1
s^2	a_2	a_0
s^1	$b_1 = \dfrac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_2}$	
s^0	$c_1 = \dfrac{a_1a_0}{a_1} = a_0$	

であり，ラウス数列は $\{a_2,\ a_1,\ b_1,\ c_1\}$ である．したがって，$a_0 = 5k_I,\ a_1 = 2 + 5k_P,\ a_2 = 2,\ a_3 = 1$ よりラウス数列が同符号であるためには，

$$\begin{cases} a_3 = 1 > 0,\ a_2 = 2 > 0, \\ b_1 = \dfrac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_2} = \dfrac{2(2 + 5k_P) - 5k_I}{2} > 0 \\ c_1 = a_0 = 2 + 5k_P > 0 \end{cases}$$
$$\longrightarrow \quad k_P > -\frac{2}{5},\ k_I < \frac{2}{5}(2 + 5k_P)$$

でなければならない．

以上より，

$$k_P > -\frac{2}{5},\ 0 < k_I < \frac{2}{5}(2 + 5k_P)$$

であれば，図 **4.3** のフィードバック制御系は安定である．

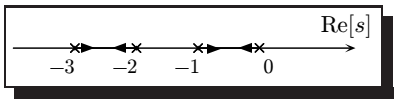
問題 **4.5** の解答

根軌跡の性質 (本書の 76 頁参照) を利用して根軌跡を描く．

(1)　$P(s)C'(s) = \dfrac{1}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$

性質 **1**　$P(s)C'(s)$ は $n = 4$ 個の極 $p_1 = 0$，$p_2 = -1$，$p_3 = -2$，$p_4 = -3$ を持ち，零点を持たない $(m = 0)$．したがって，根軌跡の始点は 4 個の極であり，終点は $n - m = 4$ 個の無限遠点である．

性質 **2**　$P(s)C'(s)$ は実軸上に 4 個の極 $p_1 = 0$，$p_2 = -1$，$p_3 = -2$，$p_4 = -3$ を持つため，$p_1 = 0$ と $p_2 = -1$ の間の実軸，$p_3 = -2$ と $p_4 = -3$ の間の実軸は根軌跡の一部である．



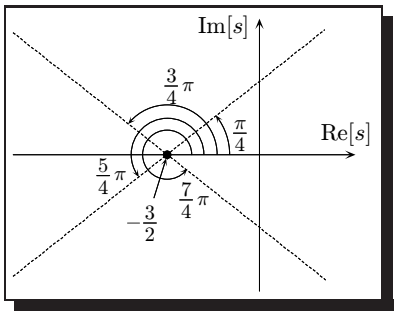
性質 3　無限遠点に向かう根軌跡の 4 本の漸近線は，(4.47) 式

$$\frac{1}{n-m}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i\right) = \frac{1}{4-0}\left(\sum_{i=1}^{4} p_i - \sum_{i=1}^{0} z_i\right)$$
$$= \frac{1}{4}(0-1-2-3) = -\frac{3}{2}$$

より始点が $(-3/2,\ 0)$，

$$\frac{(2\ell+1)\pi}{n-m} = \frac{(2\ell+1)\pi}{4-0} = \frac{(2\ell+1)\pi}{4}$$
$$= \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$$

より勾配が $\pi/4,\ 3\pi/4,\ 5\pi/4,\ 7\pi/4$ である．

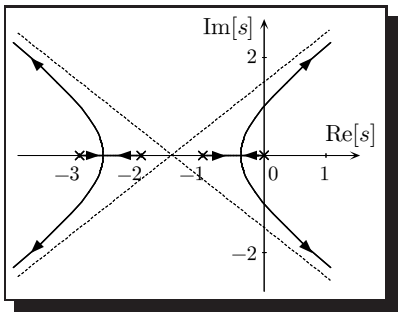


性質 4　(4.48) 式

$$\frac{d}{ds}P(s)C'(s) = \frac{d}{ds}s(s+1)(s+2)(s+3)$$
$$= 4s^3 + 18s^2 + 22s + 6$$
$$= 2(2s^3 + 9s^2 + 11s + 3)$$
$$= 2(2s+3)(s^2+3s+1) = 0$$

の根は $s = -\frac{3}{2},\ \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ である．根軌跡上にあるのは $\left(\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2},\ 0\right)$ であり，この点が根軌跡の実軸上の分岐点である．

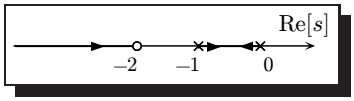
上記の性質を考慮すると，以下の根軌跡が得られる．



(2) $\quad P(s)C'(s) = \dfrac{s+2}{s(s+1)}$

性質 1　$P(s)C'(s)$ は $n = 2$ 個の極 $p_1 = 0$，$p_2 = -1$，$m = 1$ 個の零点 $z_1 = -2$ を持つ．したがって，根軌跡の始点は 2 個の極であり，終点は 1 個の零点と $n - m = 1$ 個の無限遠点である．

性質 2　$P(s)C'(s)$ は実軸上に 2 個の極 $p_1 = 0$，$p_2 = -1$，1 個の零点 $z_1 = -2$ を持つため，$z_1 = -2$ より左の実軸，$p_1 = 0$ と $p_2 = -1$ の間の実軸は根軌跡の一部である．



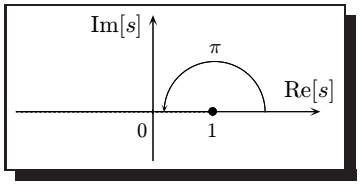
性質 3　無限遠点に向かう根軌跡の $n - m = 1$ 本の漸近線は，(4.47) 式

$$\frac{1}{n-m}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i\right) = \frac{1}{2-1}\left(\sum_{i=1}^{2} p_i - \sum_{i=1}^{1} z_i\right)$$
$$= \frac{1}{1}\{0 - 1 - (-2)\} = 1$$

より始点が $(1,\ 0)$，

$$\frac{(2\ell+1)\pi}{n-m} = \frac{(2\ell+1)\pi}{2-1} = (2\ell+1)\pi = \pi$$

より勾配が π である．

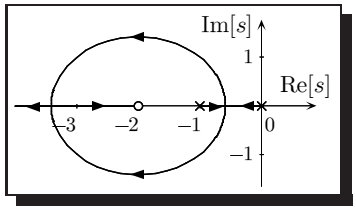


性質 4　(4.48) 式

$$\frac{d}{ds}P(s)C'(s) = \frac{d}{ds}\left(\frac{s(s+1)}{s+2}\right) = \frac{s^2+4s+2}{(s+2)^2} = 0$$

の根は $s = -2 \pm \sqrt{2}$ である．根軌跡上にあるのは $\left(-2 \pm \sqrt{2},\ 0\right)$ であり，この点が根軌跡の実軸上の合流点である．

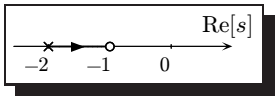
上記の性質を考慮すると，以下の根軌跡が得られる．



(3) $$P(s)C'(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s^2+2s+2)}$$

性質 1　$P(s)C'(s)$ は $n = 3$ 個の極 $p_1 = -2$，$p_2 = -1 + j$，$p_3 = -1 - j$，$m = 1$ 個の零点 $z_1 = -1$ を持つ．したがって，根軌跡の始点は 3 個の極であり，終点は零点 $z_1 = -1$ と $n - m = 2$ 個の無限遠点である．

性質 2　$P(s)C'(s)$ は実軸上に 1 個の極 $p_1 = -2$，1 個の零点 $z_1 = -1$ を持つため，$p_1 = -2$ と $z_1 = -1$ の間の実軸は根軌跡の一部である．



性質 3　無限遠点に向かう根軌跡の 2 本の漸近線は，(4.47) 式

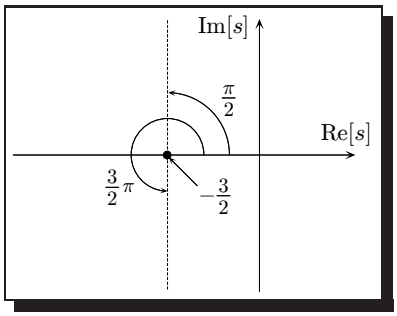
$$\frac{1}{n-m}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i\right) = \frac{1}{3-1}\left(\sum_{i=1}^{3} p_i - \sum_{i=1}^{1} z_i\right)$$

$$= \frac{1}{2}\{-2 + (-1+j) + (-1-j) - (-1)\} = -\frac{3}{2}$$

より始点が $(-3/2,\ 0)$，

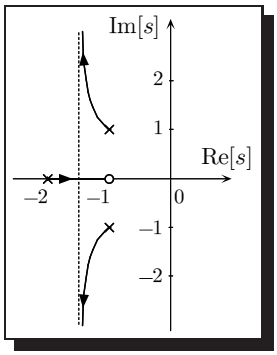
$$\frac{(2\ell+1)\pi}{n-m} = \frac{(2\ell+1)\pi}{3-1} = \frac{(2\ell+1)\pi}{2} = \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$$

より勾配が $\pi/2,\ 3\pi/2$ である．



性質 4　この場合，根軌跡の分岐点 (合流点) はない．

上記の性質を考慮すると，以下の根軌跡が得られる．



問題 **4.6** の解答

図 **4.3** において $r(s)$ から $e(s)$ の伝達関数 $G_{er}(s)$ が

$$G_{er}(s) = \frac{1}{1 + P(s)C(s)}$$

であることを利用 (問題 **4.1** 参照) し，最終値の定理より定常位置偏差 $e_\infty = \lim_{t\to\infty} e(t) = G_{er}(0)$ を求める．

(1)　$P(s) = \dfrac{5}{s^2 + 2s + 2}$, $C(s) = k_P$ とすると，

$$G_{er}(s) = \frac{1}{1 + \dfrac{5}{s^2 + 2s + 2} \times k_P} = \frac{s^2 + 2s + 2}{s^2 + 2s + 2 + 5k_P}$$

である．問題 **4.3 (1)** より $k_P > -\dfrac{2}{5}$ であるとき図 **4.3** のフィードバック制御系は安定であり，定常位置偏差 e_∞ は

$$e_\infty = \lim_{t\to\infty} e(t) = G_{er}(0) = \frac{2}{2+5k_P}$$

である．したがって，

$$k_P = 2 \text{ のとき：} e_\infty = \frac{2}{2+5\times 2} = \frac{1}{6}$$

$$k_P = 5 \text{ のとき：} e_\infty = \frac{2}{2+5\times 5} = \frac{2}{27}$$

となる．

(2) $P(s) = \dfrac{5}{s^2+2s+2}$, $C(s) = \dfrac{k_P s + k_I}{s}$ とすると，

$$G_{er}(s) = \frac{1}{1+\dfrac{5}{s^2+2s+2}\times\dfrac{k_P s+k_I}{s}} = \frac{s(s^2+2s+2)}{s^3+2s^2+(2+5k_P)s+5k_I}$$

である．問題 **4.3 (2)** より

$$k_P > -\frac{2}{5},\ 0 < k_I < \frac{2}{5}(2+5k_P)$$

であるとき図 **4.3** のフィードバック制御系は安定であり，定常位置偏差 e_∞ は

$$e_\infty = \lim_{t\to\infty} e(t) = G_{er}(0) = 0$$

となる．したがって，

$$k_P = 2,\ k_I = 1.25 \text{ のとき：} e_\infty = 0$$

となる．

問題 **4.7** の解答

図 **4.3** において，$d(s)$ から $y(s)$ の伝達関数 $G_{yd}(s)$ が

$$G_{yd}(s) = \frac{P(s)}{1+P(s)C(s)}$$

であることを利用して，最終値の定理より定常値 $y_\infty = \lim_{t\to\infty} y(t) = G_{yd}(0)$ を求める．

(1) $P(s) = \dfrac{5}{s^2+2s+2}$, $C(s) = k_P$ とすると，

$$G_{yd}(s) = \frac{\dfrac{5}{s^2+2s+2}}{1+\dfrac{5}{s^2+2s+2}\times k_P} = \frac{5}{s^2+2s+2+5k_P}$$

である．問題 **4.3 (1)** より $k_P > -\dfrac{2}{5}$ であるとき図 **4.3** のフィードバック制御系は安定であり，定常値 y_∞ は

$$y_\infty = \lim_{t\to\infty} e(t) = G_{yd}(0) = \frac{5}{2+5k_P}$$

である．したがって，

$$k_P = 2 \text{ のとき：} y_\infty = \frac{5}{2+5\times 2} = \frac{5}{12}$$

$$k_P = 5 \text{ のとき：} y_\infty = \frac{5}{2+5\times 5} = \frac{5}{27}$$

となる．

(2) $P(s) = \dfrac{5}{s^2+2s+2}$, $C(s) = \dfrac{k_P s + k_I}{s}$ とすると，

$$G_{yd}(s) = \frac{\dfrac{5}{s^2+2s+2}}{1+\dfrac{5}{s^2+2s+2}\times\dfrac{k_P s+k_I}{s}} = \frac{5s}{s^3+2s^2+(2+5k_P)s+5k_I}$$

である．問題 **4.3 (2)** より

$$k_P > -\frac{2}{5},\ 0 < k_I < \frac{2}{5}(2+5k_P)$$

であるとき図 **4.3** のフィードバック制御系は安定であり，定常値 y_∞ は

$$y_\infty = \lim_{t\to\infty} e(t) = G_{yd}(0) = 0$$

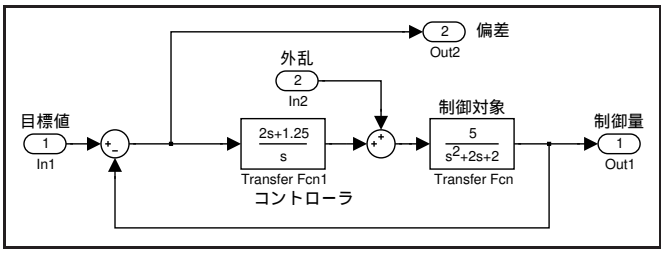
となる．したがって，

$$k_P = 2,\ k_I = 1.25 \text{ のとき：} y_\infty = 0$$

となる．

問題 4.8 の解答 (MATLAB)

まず，Simulink で以下のモデルを作成し，`ex_model.mdl` という名前で保存する．



つぎに，M ファイル `feedback.m` を作成する．

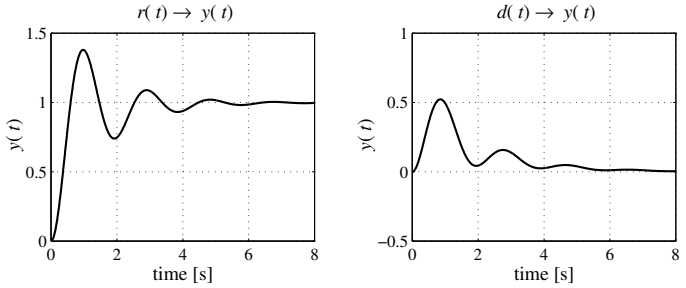
```
% feedback.m
```

```
% 閉ループ伝達関数とそのステップ応答

clear;                              % メモリ上のデータを消去
format compact;                     % 表示の省スペース化

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% 閉ループ伝達関数
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
[A,B,C,D] = linmod('ex_model'); % モデルの状態空間表現の係数行列
sys = ss(A,B,C,D);                  % 状態空間表現
sys = tf(sys);                      % 伝達関数表現への変換
sysGyr = sys(1,1)                   % Gyr(s)
sysGyd = sys(1,2)                   % Gyd(s)
sysGer = sys(2,1)                   % Ger(s)
sysGed = sys(2,2)                   % Ged(s)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% ステップ応答
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
t = 0:0.01:8;                       % 時間データ
y1 = step(sysGyr,t);                % Gyr(s) のステップ応答
y2 = step(sysGyd,t);                % Gyd(s) のステップ応答

figure(1); plot(t,y1)               % Gyr(s) のステップ応答の描画
xlabel('time [s]'); ylabel('y(t)');
title('r(t) ¥rightarrow y(t)');
grid;
axis([0 8 0 1.5]);

figure(2); plot(t,y2)               % Gyd(s) のステップ応答の描画
xlabel('time [s]'); ylabel('y(t)');
title('d(t) ¥rightarrow y(t)');
grid;
axis([0 8 -0.5 1]);
```

M ファイル `feedback.m` を実行すると，以下の結果が得られる．

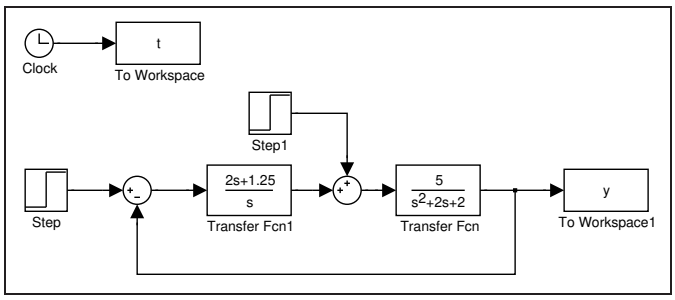
```
》 feedback ↵ ..... feedback.m の実行

Transfer function:
       10 s + 6.25
------------------------- ..... G_yr(s) = (10s + 6.25) / (s^3 + 2s^2 + 12s + 6.25)
s^3 + 2 s^2 + 12 s + 6.25


Transfer function:
```

```
          5 s
------------------------ ..... G_yd(s) = 5s / (s^3 + 2s^2 + 12s + 6.25)
s^3 + 2 s^2 + 12 s + 6.25


Transfer function:
s^3 + 2 s^2 + 2 s - 3.973e-016
---------------------------- ..... G_er(s) = (s^3 + 2s^2 + 2s) / (s^3 + 2s^2 + 12s + 6.25)
  s^3 + 2 s^2 + 12 s + 6.25


Transfer function:
          -5 s
------------------------ ..... G_ed(s) = -5s / (s^3 + 2s^2 + 12s + 6.25)
s^3 + 2 s^2 + 12 s + 6.25
```



問題 4.9 の解答 (MATLAB)

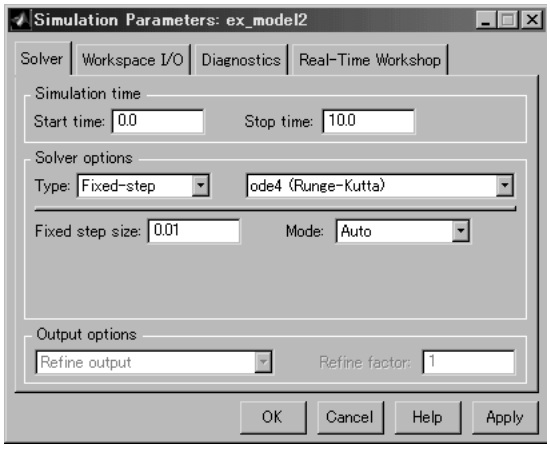
たとえば，Simulink でつぎのシミュレーションモデルを作成すればよい．



ただし，各ブロックのパラメータは

To Workspace	Save format を “Matrix (Array)” に設定 Variable name を “t” に設定
To Workspace1	Save format を “Matrix (Array)” に設定 Variable name を “y” に設定
Step	目標値応答　：Step time を “0”, Initial value を “0”, final value を “1” に設定 入力外乱応答：Step time を “0”, Initial value を “0”, final value を “0” に設定
Step1	目標値応答　：Step time を “0”, Initial value を “0”, final value を “0” に設定 入力外乱応答：Step time を “0”, Initial value を “0”, final value を “1” に設定

のように設定し，シミュレーションパラメータは



のように設定する．シミュレーション終了後，

```
》 plot(t,y); xlabel('time [s]'); ylabel('y(t)');
》 axis([0 8 0 1.5]); grid;
```

とすれば，目標値応答，入力外乱応答のグラフを描くことができる．

問題 4.10 の解答 (MATLAB)

$P(s)C'(s)$ が問題 **4.5** で示した

(1) $P(s)C'(s) = \dfrac{1}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$　　(2) $P(s)C'(s) = \dfrac{s+2}{s(s+1)}$

(3) $P(s)C'(s) = \dfrac{s+1}{(s+2)(s^2+2s+2)}$

であるときの根軌跡を描くためには，以下の M ファイル `ex_rlocus.m` を作成すればよい．

```
% ex_rlocus.m
% 閉ループ伝達関数とそのステップ応答

clear;                          % メモリ上のデータを消去
format compact;                 % 表示の省スペース化

z1 = [];                        % 零点  : なし
p1 = [0; -1; -2; -3];           % 極    : 0, −1, −2, −3
k1 = [1];                       % ゲイン : 1
sysPCd1 = zpk(z1,p1,k1)         % P(s)C'(s)

z2 = [-2];                      % 零点  : −2
p2 = [0; -1];                   % 極    : 0, −1
k2 = [1];                       % ゲイン : 1
sysPCd2 = zpk(z2,p2,k2)         % P(s)C'(s)

z3 = [-1];                      % 零点  : −1
p3 = [-2; -1+j; -1-j];          % 極    : −2, −1±j
k3 = [1];                       % ゲイン : 1
sysPCd3 = zpk(z3,p3,k3)         % P(s)C'(s)

figure(1); rlocus(sysPCd1)      % (1) の根軌跡
figure(2); rlocus(sysPCd2)      % (2) の根軌跡
figure(3); rlocus(sysPCd3)      % (3) の根軌跡
```

M ファイル `ex_rlocus.m` を実行すると，以下の結果が得られる．

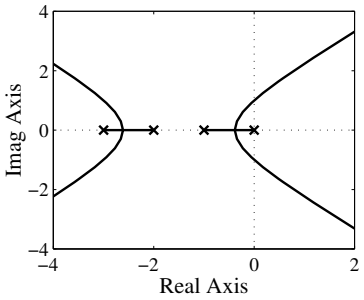
```
》 ex_rlocus ↵ ..................................... ex_rlocus.m の実行

Zero/pole/gain:
         1
------------------- ..................... P(s)C'(s) = 1/(s(s+1)(s+2)(s+3))
s (s+1) (s+2) (s+3)
```

```
Zero/pole/gain:
 (s+2)
-------
s (s+1)
```

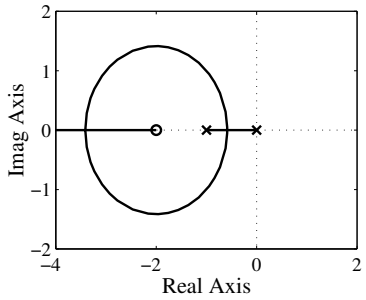
$P(s)C'(s) = \dfrac{s+2}{s(s+1)}$

```
Zero/pole/gain:
       (s+1)
--------------------
(s+2) (s^2 + 2s + 2)
```

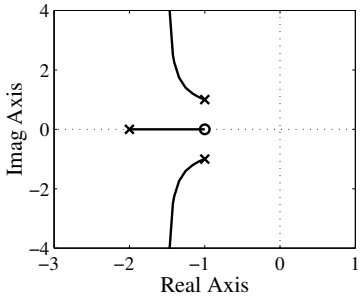
$P(s)C'(s) = \dfrac{s+1}{(s+2)(s^2+2s+2)}$



(a) 問題 **4.5** (1)



(b) 問題 **4.5** (2)



(c) 問題 **4.5** (3)

解答図

第5章

5 章の解答

問題 **5.1** の解答

制御対象の伝達関数 $P(s)$ が

$$P(s) = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

であり，P コントローラが

$$u(s) = k_P e(s)$$

であることより，$r(s)$ から $y(s)$ への伝達関数 $G_{yr}(s)$，$d(s)$ から $y(s)$ への伝達関数 $G_{yd}(s)$ はそれぞれ

$$G_{yr}(s) = \frac{P(s)k_P}{1 + P(s)k_P},\ G_{yd}(s) = \frac{P(s)}{1 + P(s)k_P}$$

により求まる (本書 65 頁の (4.6) 式参照)．したがって，

$$\begin{aligned} G_{yr}(s) = \frac{P(s)k_P}{1 + P(s)k_P} &= \frac{\dfrac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \times k_P}{1 + \dfrac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \times k_P} \\ &= \frac{b_0 k_P}{s^2 + a_1 s + a_0 + b_0 k_P} \\ &= \frac{K_1 \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{yr}(s) = \frac{P(s)}{1 + P(s)k_P} &= \frac{\dfrac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}}{1 + \dfrac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \times k_P} \\ &= \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0 + b_0 k_P} \\ &= \frac{K_2 \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \end{aligned}$$

となる．ここで，

$$\begin{cases} \omega_n^2 = a_0 + b_0 k_P \\ 2\zeta\omega_n = a_1 \\ K_1\omega_n^2 = b_0 k_P \\ K_2\omega_n^2 = b_0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \omega_n = \sqrt{a_0 + b_0 k_P} \\ \zeta = \dfrac{a_1}{2\omega_n} = \dfrac{a_1}{2\sqrt{a_0 + b_0 k_P}} \\ K_1 = \dfrac{b_0 k_P}{\omega_n^2} = \dfrac{b_0 k_P}{a_0 + b_0 k_P} \\ K_2 = \dfrac{b_0}{\omega_n^2} = \dfrac{b_0}{a_0 + b_0 k_P} \end{cases}$$

であり，本書の $(5.16) \sim (5.18)$ 式が得られる．

また，ζ を指定した値 ζ_M とするためには，比例ゲイン k_P を

$$\zeta_M = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 + b_0 k_P}}$$

となるように，すなわち，

$$\zeta_M^2 = \frac{a_1^2}{4(a_0 + b_0 k_P)} \quad \longrightarrow \quad k_P = \frac{a_1^2 - 4\zeta_M^2 a_0}{4\zeta_M^2 b_0} = \frac{1}{b_0}\left(\frac{a_1^2}{4\zeta_M^2} - a_0\right)$$

と選べばよい．

問題 **5.2** の解答

制御対象の伝達関数 $P(s)$ は

$$P(s) = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

であり，P–D コントローラは

$$u(s) = k_P e(s) - k_D s y(s)$$

である．したがって，

$$\begin{aligned} y(s) &= P(s)\big(u(s) + d(s)\big) = P(s)\big(k_P e(s) - k_D s y(s) + d(s)\big) \\ &= P(s)\big\{k_P\big(r(s) - y(s)\big) - k_D s y(s) + d(s)\big\} \\ \longrightarrow \quad & \big\{1 + P(s)\big(k_D s + k_P\big)\big\} y(s) = P(s) k_P r(s) + P(s) d(s) \\ \longrightarrow \quad & y(s) = \frac{P(s) k_P}{1 + P(s)\big(k_D s + k_P\big)} r(s) + \frac{P(s)}{1 + P(s)\big(k_D s + k_P\big)} d(s) \end{aligned}$$

であるから，$r(s)$ から $y(s)$ への伝達関数 $G_{yr}(s)$，$d(s)$ から $y(s)$ への伝達関数 $G_{yd}(s)$ はそれぞれ

$$G_{yr}(s) = \frac{P(s) k_P}{1 + P(s)\big(k_D s + k_P\big)}, \quad G_{yd}(s) = \frac{P(s)}{1 + P(s)\big(k_D s + k_P\big)}$$

により求まり，

$$
\begin{aligned}
G_{yr}(s) &= \frac{P(s)k_P}{1+P(s)\big(k_D s+k_P\big)} = \frac{\dfrac{b_0}{s^2+a_1 s+a_0}\times k_P}{1+\dfrac{b_0}{s^2+a_1 s+a_0}\times\big(k_D s+k_P\big)} \\
&= \frac{b_0 k_P}{s^2+\big(a_1+b_0k_D\big)s+a_0+b_0k_P} \\
&= \frac{K_1\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G_{yr}(s) &= \frac{P(s)}{1+P(s)k_P} = \frac{\dfrac{b_0}{s^2+a_1 s+a_0}}{1+\dfrac{b_0}{s^2+a_1 s+a_0}\times\big(k_D s+k_P\big)} \\
&= \frac{b_0}{s^2+\big(a_1+b_0k_D\big)s+a_0+b_0k_P} \\
&= \frac{K_2\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}
\end{aligned}
$$

となる．ここで，

$$
\begin{cases}
\omega_n^2 = a_0+b_0k_P \\
2\zeta\omega_n = a_1+b_0k_D \\
K_1\omega_n^2 = b_0k_P \\
K_2\omega_n^2 = b_0
\end{cases}
\longrightarrow
\begin{cases}
\omega_n = \sqrt{a_0+b_0k_P} \\
\zeta = \dfrac{a_1+b_0k_D}{2\omega_n} = \dfrac{a_1+b_0k_D}{2\sqrt{a_0+b_0k_P}} \\
K_1 = \dfrac{b_0k_P}{\omega_n^2} = \dfrac{b_0k_P}{a_0+b_0k_P} \\
K_2 = \dfrac{b_0}{\omega_n^2} = \dfrac{b_0}{a_0+b_0k_P}
\end{cases}
$$

であり，本書の $(5.20)\sim(5.22)$ 式が得られる．

また，ζ, ω_n をそれぞれ指定した値 ζ_M, ω_M とするためには，比例ゲイン k_P，微分ゲイン k_D を

$$
\omega_M = \sqrt{a_0+b_0k_P},\ \zeta_M = \frac{a_1+b_0k_D}{2\omega_M}
$$

となるように，すなわち，本書の (5.23) 式

$$
k_P = \frac{\omega_M^2-a_0}{b_0},\ k_D = \frac{2\zeta_M\omega_M-a_1}{b_0}
$$

のように選べばよい．

問題 5.3 の解答

PI–D コントローラ

$$
u(s) = \left(k_P+\frac{k_I}{s}\right)e(s) - k_D s y(s)
$$

を用いると，

$$
\begin{aligned}
y(s) &= P(s)\big(u(s)+d(s)\big) = P(s)\left\{\left(k_P+\frac{k_I}{s}\right)e(s) - k_D s y(s) + d(s)\right\} \\
&= P(s)\left\{\left(k_P+\frac{k_I}{s}\right)\big(r(s)-y(s)\big) - k_D s y(s) + d(s)\right\} \\
\longrightarrow\quad & \left(1+P(s)\frac{k_D s^2+k_P s+k_I}{s}\right) y(s) = P(s)\frac{k_P s+k_I}{s} r(s) + P(s) d(s) \\
\longrightarrow\quad & y(s) = \frac{P(s)\dfrac{k_P s+k_I}{s}}{1+P(s)\dfrac{k_D s^2+k_P s+k_I}{s}} r(s) + \frac{P(s)}{1+P(s)\dfrac{k_D s^2+k_P s+k_I}{s}} d(s)
\end{aligned}
$$

であるから，$r(s)$ から $y(s)$ への伝達関数 $G_{yr}(s)$，$d(s)$ から $y(s)$ への伝達関数 $G_{yd}(s)$ はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
G_{yr}(s) &= \frac{P(s)\dfrac{k_P s+k_I}{s}}{1+P(s)\dfrac{k_D s^2+k_P s+k_I}{s}} \\
&= \frac{\dfrac{b_0}{s^2+a_1 s+a_0}\times\dfrac{k_P s+k_I}{s}}{1+\dfrac{b_0}{s^2+a_1 s+a_0}\times\dfrac{k_D s^2+k_P s+k_I}{s}} \\
&= \frac{b_0\big(k_P s+k_I\big)}{s^3+(a_1+b_0 k_D)s^2+(a_0+b_0 k_P)s+b_0 k_I} \\
G_{yd}(s) &= \frac{P(s)}{1+P(s)\dfrac{k_D s^2+k_P s+k_I}{s}} \\
&= \frac{\dfrac{b_0}{s^2+a_1 s+a_0}}{1+\dfrac{b_0}{s^2+a_1 s+a_0}\times\dfrac{k_D s^2+k_P s+k_I}{s}} \\
&= \frac{b_0 s}{s^3+(a_1+b_0 k_D)s^2+(a_0+b_0 k_P)s+b_0 k_I}
\end{aligned}
$$

により求まる（本書の (5.24), (5.25) 式）．

ここで，比例ゲイン k_P，積分ゲイン k_I，微分ゲイン k_D を本書の (5.28) 式

$$
k_I = \frac{\omega_M a_0}{2\zeta_M b_0},\ k_P = \frac{\omega_M^2}{b_0},\ k_D = \frac{2\zeta_M\omega_M}{b_0} + \frac{a_0}{2\zeta_M\omega_M b_0} - \frac{a_1}{b_0}
$$

とすると，$G_{yr}(s)$ の分子 $N_{yr}(s)$, 分子 $D_{yr}(s)$ はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
N_{yr}(s) &= b_0\big(k_P s + k_I\big) = b_0\left(\frac{\omega_M^2}{b_0}s + \frac{\omega_M a_0}{2\zeta_M b_0}\right) \\
&= \omega_M^2\left(s + \frac{a_0}{2\zeta_M\omega_M}\right) \\
D_{yr}(s) &= s^3 + (a_1 + b_0 k_D)s^2 + (a_0 + b_0 k_P)s + b_0 k_I \\
&= s^3 + \left\{a_1 + b_0 \times \left(\frac{2\zeta_M\omega_M}{b_0} + \frac{a_0}{2\zeta_M\omega_M b_0} - \frac{a_1}{b_0}\right)\right\}s^2 \\
&\quad + \left(a_0 + b_0 \times \frac{\omega_M^2}{b_0}\right)s + b_0 \times \frac{\omega_M a_0}{2\zeta_M b_0} \\
&= s^3 + \left(2\zeta_M\omega_M + \frac{a_0}{2\zeta_M\omega_M}\right)s^2 + \big(a_0 + \omega_M^2\big)s + \frac{\omega_M a_0}{2\zeta_M} \\
&= \left(s + \frac{a_0}{2\zeta_M\omega_M}\right)\big(s^2 + 2\zeta_M\omega_M s + \omega_M^2\big)
\end{aligned}
$$

となる．したがって，比例ゲイン k_P，積分ゲイン k_I，微分ゲイン k_D を本書の (5.28) 式と選ぶと，$r(s)$ から $y(s)$ への伝達関数 $G_{yr}(s)$ は

$$
\begin{aligned}
G_{yr}(s) = \frac{N_{yr}(s)}{D_{yr}(s)} &= \frac{\omega_M^2\left(s + \dfrac{a_0}{2\zeta_M\omega_M}\right)}{\left(s + \dfrac{a_0}{2\zeta_M\omega_M}\right)\big(s^2 + 2\zeta_M\omega_M s + \omega_M^2\big)} \\
&= \frac{\omega_M^2}{s^2 + 2\zeta_M\omega_M s + \omega_M^2}
\end{aligned}
$$

となり，本書 (5.27) 式の $G_M(s)$ と一致する．

問題 **5.4** の解答

台車の伝達関数 $P(s)$ は本書の例 **2.3** (15 頁) より

$$
P(s) = \frac{1}{Ms^2 + cs}
$$

である．一方，I–PD コントローラ

$$
u(s) = \frac{k_I}{s}e(s) - \big(k_P + k_D s\big)y(s)
$$

を用いると，

$$
\begin{aligned}
y(s) &= P(s)\big(u(s)+d(s)\big) = P(s)\left\{\frac{k_I}{s}e(s) - \big(k_P + k_D s\big)y(s) + d(s)\right\} \\
&= P(s)\left\{\frac{k_I}{s}\big(r(s)-y(s)\big) - \big(k_P + k_D s\big)y(s) + d(s)\right\} \\
&\longrightarrow \quad \left(1 + P(s)\frac{k_D s^2 + k_P s + k_I}{s}\right) y(s) = P(s)\frac{k_I}{s}r(s) + P(s)d(s) \\
&\longrightarrow \quad y(s) = \frac{P(s)\dfrac{k_I}{s}}{1 + P(s)\dfrac{k_D s^2 + k_P s + k_I}{s}} r(s) + \frac{P(s)}{1 + P(s)\dfrac{k_D s^2 + k_P s + k_I}{s}} d(s)
\end{aligned}
$$

であるから，$r(s)$ から $y(s)$ への伝達関数 $G_{yr}(s)$，$d(s)$ から $y(s)$ への伝達関数 $G_{yd}(s)$ はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
G_{yr}(s) &= \frac{P(s)\dfrac{k_I}{s}}{1 + P(s)\dfrac{k_D s^2 + k_P s + k_I}{s}} \\
G_{yd}(s) &= \frac{P(s)}{1 + P(s)\dfrac{k_D s^2 + k_P s + k_I}{s}}
\end{aligned}
$$

により求まる．ここで，$P(s) = \dfrac{1}{Ms^2 + cs}$ を代入すると，$G_{yd}(s)$ は

$$
\begin{aligned}
G_{yd}(s) &= \frac{\dfrac{1}{Ms^2 + cs}}{1 + \dfrac{1}{Ms^2 + cs} \times \dfrac{k_D s^2 + k_P s + k_I}{s}} \\
&= \frac{s}{Ms^3 + \big(c + k_D\big)s^2 + k_P s + k_I}
\end{aligned}
$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{G_{yd}(s)} = \frac{k_I}{s} + k_P + \big(c + k_D\big)s + Ms^2 \\
&\longrightarrow \quad \frac{s}{k_I}\frac{1}{G_{yd}(s)} = 1 + \frac{k_P}{k_I}s + \frac{c + k_D}{k_I}s^2 + \frac{M}{k_I}s^3
\end{aligned}
$$

となる．したがって，$\dfrac{s}{k_I}\dfrac{1}{G_{yd}(s)}$ と 3 次の規範モデル

$$
G_M(s) = \frac{\omega_M^3}{s^3 + \alpha_2\omega_M s^2 + \alpha_1\omega_M^2 + \omega_M^3}
$$

の逆数

$$
\frac{1}{G_M(s)} = 1 + \frac{\alpha_1}{\omega_M}s + \frac{\alpha_2}{\omega_M^2}s^2 + \frac{1}{\omega_M^3}s^3
$$

を完全に一致させるためには，比例ゲイン k_P ，積分ゲイン k_I ，微分ゲイン k_D を

$$\begin{cases} \dfrac{k_P}{k_I} = \dfrac{\alpha_1}{\omega_M} \\ \dfrac{c+k_D}{k_I} = \dfrac{\alpha_2}{\omega_M^2} \\ \dfrac{M}{k_I} = \dfrac{1}{\omega_M^3} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} k_I = M\omega_M^3 \\ k_P = \dfrac{k_I\alpha_1}{\omega_M} = M\alpha_1\omega_M^2 \\ k_D = \dfrac{k_I\alpha_2}{\omega_M^2} - c = M\alpha_2\omega_M - c \end{cases}$$

と選べばよい．

問題 5.5 の解答 (MATLAB)

問題 5.4 に示したように，I–PD コントローラ

$$u(s) = \frac{k_I}{s}e(s) - \big(k_P + k_D s\big)y(s)$$

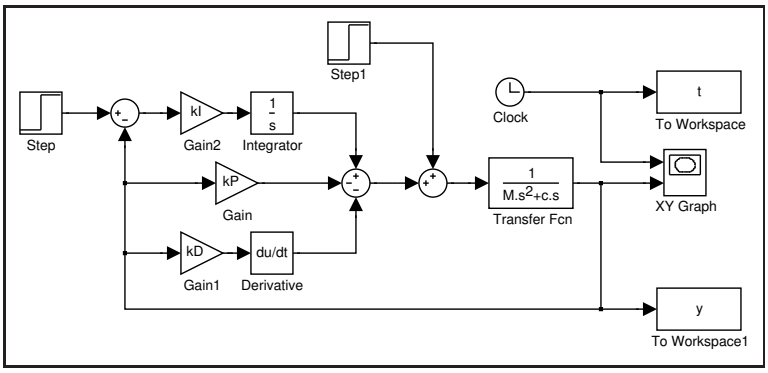
の比例ゲイン k_P ，積分ゲイン k_I ，微分ゲイン k_D を

$$\begin{cases} k_I = M\omega_M^3 \\ k_P = \dfrac{k_I\alpha_1}{\omega_M} = M\alpha_1\omega_M^2 \\ k_D = \dfrac{k_I\alpha_2}{\omega_M^2} - c = M\alpha_2\omega_M - c \end{cases}$$

により定めるため，以下に示す M ファイル cart_IPD.m を作成する．

```
% cart_IPD.m
% 入力外乱応答に注目した I-PD 制御

clear;                          % メモリ上のデータを消去
format compact;                 % 表示の省スペース化

M  = 0.440 ;                    % 台車の質量 M
c  = 8.32;                      % 粘性摩擦係数 c

disp(' 固有角周波数を入力');     % ディスプレイに表示
omegan = input('omegan = ');    % 固有角周波数 omegan を入力
disp(' α 1 を入力');            % ディスプレイに表示
alpha1 = input('alpha1 = ');    % α 1 を入力
disp(' α 2 を入力');            % ディスプレイに表示
alpha2 = input('alpha2 = ');    % α 2 を入力

kI = M*omegan^3                 % 積分ゲイン kI の決定
kP = M*alpha1*omegan^2          % 比例ゲイン kP の決定
kD = M*alpha2*omegan - c        % 微分ゲイン kD の決定
```

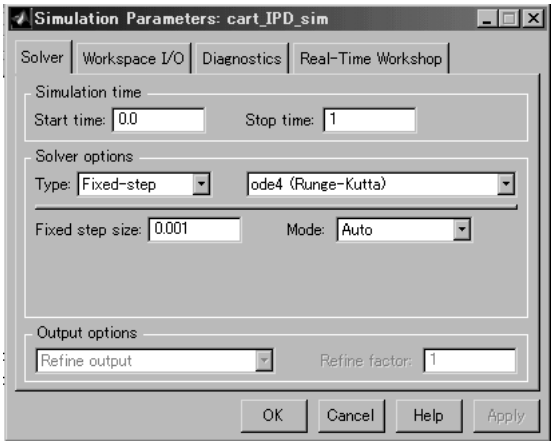
また，以下のシミュレーションモデル cart_IPD_sim.mdl を作成する．



ただし，各ブロックのパラメータは

To Workspace	Save format を“Matrix (Array)”に設定 Variable name を“t”に設定
To Workspace1	Save format を“Matrix (Array)”に設定 Variable name を“y”に設定
Step	目標値応答　：Step time を“0”, Initial value を“0”, final value を“1”に設定 入力外乱応答：Step time を“0”, Initial value を“0”, final value を“0”に設定
Step1	目標値応答　：Step time を“0”, Initial value を“0”, final value を“0”に設定 入力外乱応答：Step time を“0”, Initial value を“1”に設定

のように設定し，シミュレーションパラメータは



のように設定する．

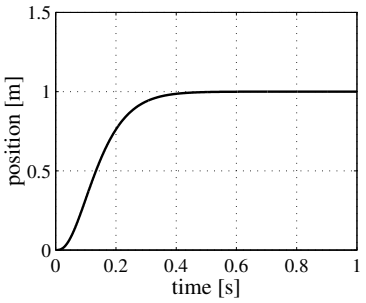
M ファイル cart_IPD.m を実行すると，

```
》 cart_IPD ↵ ..... cart_IPD.m の実行
固有角周波数を入力
omegan = 20 ↵ ..... ωn = 20 に指定
α 1 を入力
alpha1 = 3 ↵ ..... α1 = 3 に指定
α 2 を入力
alpha2 = 3 ↵ ..... α2 = 3 に指定
kI =
        3520 ..... kI = 3520
kP =
   528 ..... kP = 528
kD =
   18.0800 ..... kD = 18.08
```

のように比例ゲイン k_P，積分ゲイン k_I，微分ゲイン k_D が定まる．つぎに，シミュレーションモデル cart_IPD_sim.mdl によりシミュレーションを行い，

```
》 plot(t,y); xlabel('time [s]'); ylabel('potision [m]'); ↵
》 axis([0 1 0 1.5]); grid; ↵
```

と入力すると，Figure Window に目標値応答が描画される．



第 6 章

6 章の解答

問題 6.1 の解答

不安定なシステム

$$y(s) = \frac{1}{s-1}u(s)$$

に正弦波 $u(t) = \sin t$ を加えると，

$$u(s) = \mathcal{L}\big[u(t)\big] = \frac{1}{s^2+1^2}$$

より $y(s)$ は

$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{1}{s-1} \times \frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{(s-1)(s+j)(s-j)} \\ &= \frac{k_1}{s-1} + \frac{k_2}{s+j} + \frac{k_3}{s-j} \end{aligned}$$

のように部分分数分解される．ただし，

$$k_1 = (s-1)y(s)\big|_{s=1} = \left.\frac{1}{(s+j)(s-j)}\right|_{s=1} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= (s+j)y(s)\big|_{s=-j} = \left.\frac{1}{(s-1)(s-j)}\right|_{s=-j} = \frac{1}{(j+1)\times 2j} \\ &= \frac{1}{2(j-1)} = -\frac{j+1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3 &= (s-j)y(s)\big|_{s=j} = \left.\frac{1}{(s-1)(s+j)}\right|_{s=j} = \frac{1}{(j-1)\times 2j} \\ &= -\frac{1}{2(j+1)} = \frac{j-1}{4} \end{aligned}$$

である．ここで，オイラーの公式より

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\big[y(s)\big] = k_1 e^{t} + k_2 e^{-jt} + k_3 e^{jt} \\ &= \frac{1}{2}e^{t} - \frac{j+1}{4}\big(\cos t - j\sin t\big) + \frac{j-1}{4}\big(\cos t + j\sin t\big) \\ &= \frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{2}\big(\cos t + \sin t\big) = \frac{1}{2}e^{t} - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \quad (t \geq 0) \end{aligned}$$

であるから，$t \to \infty$ で $e^t \to \infty$ となり，$y(t)$ は発散する．したがって，$y(t)$ は本書の (6.7) 式で近似できない．

問題 6.2 の解答

(1)　伝達関数 $P(s) = \dfrac{1}{s+5}$ は

$$P(s) = \frac{1}{D(s)},\ D(s) = s+5$$

とかけるから，

$$|P(j\omega)| = \frac{1}{|D(j\omega)|},\ \angle P(j\omega) = -\angle D(j\omega)$$

により $|P(j\omega)|, \angle P(j\omega)$ が求まる．ここで，

$$D(j\omega) = j\omega + 5$$
$$\longrightarrow \quad |D(j\omega)| = \sqrt{5^2+\omega^2} = \sqrt{25+\omega^2},\ \angle D(j\omega) = \tan^{-1}\frac{\omega}{5}$$

であるから，

$$|P(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{25+\omega^2}},\ \angle P(j\omega) = -\tan^{-1}\frac{\omega}{5}$$

となる．

(2)　伝達関数 $P(s) = \dfrac{1}{s-5}$ は

$$P(s) = \frac{1}{D(s)},\ D(s) = s-5$$

とかけるから，

$$|P(j\omega)| = \frac{1}{|D(j\omega)|},\ \angle P(j\omega) = -\angle D(j\omega)$$

により $|P(j\omega)|, \angle P(j\omega)$ が求まる．ここで，

$$D(j\omega) = j\omega - 5$$
$$\longrightarrow \quad \begin{cases} |D(j\omega)| = \sqrt{(-5)^2+\omega^2} = \sqrt{25+\omega^2} \\ \angle D(j\omega) = \tan^{-1}\dfrac{\omega}{-5} = -\tan^{-1}\dfrac{\omega}{5} \end{cases}$$

であるから，

$$|P(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{25+\omega^2}},\ \angle P(j\omega) = \tan^{-1}\frac{\omega}{5}$$

となる．

(3)　伝達関数 $P(s) = \dfrac{2}{s^2+2s+2}$ は

$$P(s) = \frac{N(s)}{D(s)},\ N(s) = 2,\ D(s) = s^2+2s+2$$

とかけるから，

$$|P(j\omega)| = \frac{|N(j\omega)|}{|D(j\omega)|},\ \angle P(j\omega) = \angle N(j\omega) - \angle D(j\omega)$$

により $|P(j\omega)|, \angle P(j\omega)$ が求まる．ここで，

$$N(j\omega) = 2$$

$$\longrightarrow \begin{cases} |N(j\omega)| = 2 \\ \angle N(j\omega) = \tan^{-1}\dfrac{0}{2} = \tan^{-1} 0 = 0 \end{cases}$$

$$D(j\omega) = (j\omega)^2 + 2j\omega + 2 = 2 - \omega^2 + j\cdot 2\omega$$

$$\longrightarrow \begin{cases} |D(j\omega)| = \sqrt{(2-\omega^2)^2 + (2\omega)^2} = \sqrt{4+\omega^4} \\ \angle D(j\omega) = \tan^{-1}\dfrac{2\omega}{2-\omega^2} \end{cases}$$

であるから，

$$|P(j\omega)| = \frac{2}{\sqrt{4+\omega^4}},\ \angle P(j\omega) = -\tan^{-1}\frac{2\omega}{2-\omega^2}$$

となる．

(4) 伝達関数 $P(s) = \dfrac{s(s+1)}{2(s+3)(s+4)(s+5)}$ は，

$$P(s) = \frac{N_1(s)N_2(s)N_3(s)}{D_1(s)D_2(s)D_3(s)},\ \begin{cases} N_1(s) = \dfrac{1}{2} \\ N_2(s) = s \\ N_3(s) = s+1 \end{cases},\ \begin{cases} D_1(s) = s+3 \\ D_2(s) = s+4 \\ D_3(s) = s+5 \end{cases}$$

とかけるから，

$$|P(j\omega)| = \frac{|N_1(j\omega)||N_2(j\omega)||N_3(j\omega)|}{|D_1(j\omega)||D_2(j\omega)||D_3(j\omega)|}$$

$$\angle P(j\omega) = \angle N_1(j\omega) + \angle N_2(j\omega) + \angle N_3(j\omega) - (\angle D_1(j\omega) + \angle D_2(j\omega) + \angle D_3(j\omega))$$

により $|P(j\omega)|, \angle P(j\omega)$ が求まる．ここで，

$$N_1(j\omega) = \frac{1}{2}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} |N_1(j\omega)| = \dfrac{1}{2} \\ \angle N_1(j\omega) = \tan^{-1}\dfrac{0}{1/2} = \tan^{-1} 0 = 0 \end{cases}$$

$$N_2(j\omega) = j\omega$$

$$\longrightarrow \begin{cases} |N_2(j\omega)| = \sqrt{\omega^2} = \omega \\ \angle N_2(j\omega) = \tan^{-1}\dfrac{\omega}{0} = \tan^{-1}\infty = 90\ [\mathrm{deg}] \end{cases}$$

$$N_3(j\omega) = j\omega + 1$$
$$\longrightarrow \quad \begin{cases} |N_3(j\omega)| = \sqrt{1^2+\omega^2} = \sqrt{1+\omega^2} \\ \angle N_3(j\omega) = \tan^{-1}\dfrac{\omega}{1} = \tan^{-1}\omega \end{cases}$$
$$D_1(j\omega) = j\omega + 3$$
$$\longrightarrow \quad \begin{cases} |D_1(j\omega)| = \sqrt{3^2+\omega^2} = \sqrt{9+\omega^2} \\ \angle D_1(j\omega) = \tan^{-1}\dfrac{\omega}{3} \end{cases}$$
$$D_2(j\omega) = j\omega + 4$$
$$\longrightarrow \quad \begin{cases} |D_2(j\omega)| = \sqrt{4^2+\omega^2} = \sqrt{16+\omega^2} \\ \angle D_2(j\omega) = \tan^{-1}\dfrac{\omega}{4} \end{cases}$$
$$D_3(j\omega) = j\omega + 5$$
$$\longrightarrow \quad \begin{cases} |D_3(j\omega)| = \sqrt{5^2+\omega^2} = \sqrt{25+\omega^2} \\ \angle D_3(j\omega) = \tan^{-1}\dfrac{\omega}{5} \end{cases}$$

であるから，

$$|P(j\omega)| = \frac{\dfrac{1}{2}\omega\sqrt{1+\omega^2}}{\sqrt{9+\omega^2}\sqrt{16+\omega^2}\sqrt{25+\omega^2}} = \frac{\omega}{2}\sqrt{\frac{1+\omega^2}{(9+\omega^2)(16+\omega^2)(25+\omega^2)}}$$
$$\angle P(j\omega) = 0 + 90 + \tan^{-1}\omega - \left(\tan^{-1}\frac{\omega}{3} + \tan^{-1}\frac{\omega}{4} + \tan^{-1}\frac{\omega}{5}\right) = 90 + \tan^{-1}\omega - \left(\tan^{-1}\frac{\omega}{3} + \tan^{-1}\frac{\omega}{4} + \tan^{-1}\frac{\omega}{5}\right) \text{ [deg]}$$

となる．

(5) 伝達関数 $P(s) = \dfrac{1}{(s+1)^{10}}$ は

$$P(s) = \frac{1}{D(s)^{10}},\ D(s) = s+1$$

とかけるから，

$$|P(j\omega)| = \frac{1}{|D(j\omega)|^{10}},\ \angle P(j\omega) = -10\angle D(j\omega)$$

により $|P(j\omega)|, \angle P(j\omega)$ が求まる．ここで，

$D(j\omega) = j\omega + 1$

$\longrightarrow \quad |D(j\omega)| = \sqrt{1^2+\omega^2} = \sqrt{1+\omega^2},\ \angle D(j\omega) = \tan^{-1}\dfrac{\omega}{1} = \tan^{-1}\omega$

であるから，

$$|P(j\omega)| = \frac{1}{\left(\sqrt{1+\omega^2}\right)^{10}} = \frac{1}{\left(1+\omega^2\right)^5},\ \angle P(j\omega) = -10\tan^{-1}\omega$$

となる．

問題 **6.3** の解答

システム

$$y(s) = P(s)u(s),\ P(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+2}$$

は $P(s)$ の極 ($s^2+2s+2=0$ の根) が $s=-1\pm j$ であり，実部がすべて負であるから，安定なシステムである．したがって，$u(t) = A\sin\omega t$ を加えたときの $y(t)$ の定常状態 (t が十分大きいときの $y(t)$) は

$$y(t) \cong A|P(j\omega)|\sin(\omega t + \angle P(j\omega))$$

となる．
ここで，$P(s)$ は

$$P(s) = \frac{N(s)}{D(s)},\ N(s) = s+2,\ D(s) = s^2+2s+2$$

と表すことができるため，

$$|P(j\omega)| = \frac{|N(j\omega)|}{|D(j\omega)|},\ \angle P(j\omega) = \angle N(j\omega) - \angle D(j\omega)$$

により $|P(j\omega)|, \angle P(j\omega)$ が求まる．したがって，

$$N(j\omega) = j\omega + 2$$

$$\longrightarrow \begin{cases} |N(j\omega)| = \sqrt{2^2+\omega^2} = \sqrt{4+\omega^2} \\ \angle N(j\omega) = \tan^{-1}\dfrac{\omega}{2} \end{cases}$$

$$D(j\omega) = (j\omega)^2 + 2j\omega + 2 = 2 - \omega^2 + j\cdot 2\omega$$

$$\longrightarrow \begin{cases} |D(j\omega)| = \sqrt{(2-\omega^2)^2+(2\omega)^2} = \sqrt{\omega^4+4} \\ \angle D(j\omega) = \tan^{-1}\dfrac{2\omega}{2-\omega^2} \end{cases}$$

であるから，

$$|P(j\omega)| = \frac{\sqrt{4+\omega^2}}{\sqrt{\omega^4+4}} = \sqrt{\frac{4+\omega^2}{4+\omega^4}}$$

$$\angle P(j\omega) = \tan^{-1}\frac{\omega}{2} - \tan^{-1}\frac{2\omega}{2-\omega^2}$$

となり，$u(t) = A\sin\omega t$ を加えたときの $y(t)$ の定常状態は

$$y(t) \cong A\sqrt{\frac{4+\omega^2}{4+\omega^4}}\sin\left(\omega t + \tan^{-1}\frac{\omega}{2} - \tan^{-1}\frac{2\omega}{2-\omega^2}\right)$$

となる．ここで，$A=1, \omega=1$ とすると，$u(t) = \sin t$ を加えたときの $y(t)$ の定常状態が以下のように得られる．

$$y(t) \cong 1\times\sqrt{\frac{4+1^2}{4+1^4}}\sin\left(t+\tan^{-1}\frac{1}{2}-\tan^{-1}\frac{2\times1}{2-1^2}\right)$$
$$=\sin\left(t+\tan^{-1}\frac{1}{2}-\tan^{-1}2\right)$$

問題 6.4 の解答

$\omega=\omega_1,\,\omega_2,\,\omega_3,\,\omega_4$ でのゲイン $20\log_{10}|P(j\omega)|$ がそれぞれ $20,\,0,\,-20,\,-40$ [dB] であるから，$\omega=\omega_1,\,\omega_2,\,\omega_3,\,\omega_4$ における $|P(j\omega)|$ が以下のように求まる．

$$\begin{cases} 20\log_{10}|P(j\omega_1)|=20 \\ 20\log_{10}|P(j\omega_2)|=0 \\ 20\log_{10}|P(j\omega_3)|=-20 \\ 20\log_{10}|P(j\omega_4)|=-40 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} |P(j\omega_1)|=10^1=10 \\ |P(j\omega_2)|=10^0=1 \\ |P(j\omega_3)|=10^{-1}=\dfrac{1}{10} \\ |P(j\omega_4)|=10^{-2}=\dfrac{1}{100} \end{cases}$$

また，安定なシステム $y(s)=P(s)u(s)$ に入力 $u(t)=A\sin\omega t$ を加えたときの出力 $y(t)$ の定常値は

$$y(t)\cong B(\omega)\sin(\omega t+G_p(\omega)),\ B(\omega)=A|P(j\omega)|,\ G_p(\omega)=\angle P(j\omega)$$

であるから，入力 $u(t)$ と出力 $y(t)$ の振幅比 $B(\omega)/A$ は

$$\frac{B(\omega)}{A}=\frac{A|P(j\omega)|}{A}=|P(j\omega)|$$

である．したがって，$\omega=\omega_1,\,\omega_2,\,\omega_3,\,\omega_4$ における振幅比 $B(\omega_i)/A$ は

$$\begin{cases} \dfrac{A|P(j\omega_1)|}{A}=|P(j\omega_1)|=10^1=10 \\ \dfrac{A|P(j\omega_2)|}{A}=|P(j\omega_2)|=10^0=1 \\ \dfrac{A|P(j\omega_3)|}{A}=|P(j\omega_3)|=10^{-1}=\dfrac{1}{10} \\ \dfrac{A|P(j\omega_4)|}{A}=|P(j\omega_4)|=10^{-2}=\dfrac{1}{100} \end{cases}$$

である．

問題 6.5 の解答

1 次遅れ要素

$$P(s)=\frac{1}{1+Ts}$$

において，$|P(j\omega)|,\,\angle P(j\omega)$ を求めると，

$$P(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$$

$$\longrightarrow \quad |P(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}},\ \angle P(j\omega) = -\tan^{-1}\omega T$$

となる．

一方，周波数伝達関数 $P(j\omega)$ を

$$P(j\omega) = x + jy,\ x = \mathrm{Re}\big[P(j\omega)\big],\ y = \mathrm{Im}\big[P(j\omega)\big]$$

と表すと，$|P(j\omega)|, \angle P(j\omega)$ は

$$|P(j\omega)| = \sqrt{x^2 + y^2},\ \angle P(j\omega) = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

であるから，

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}},\ \tan^{-1}\frac{y}{x} = -\tan^{-1}\omega T$$

という関係式が得られる．

したがって，

$$\tan^{-1}\frac{y}{x} = -\tan^{-1}\omega T = \tan^{-1}(-\omega T)$$

$$\longrightarrow \quad \frac{y}{x} = -\omega T$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(-\dfrac{y}{x}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\longrightarrow \quad x^2 + y^2 = x$$

$$\longrightarrow \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

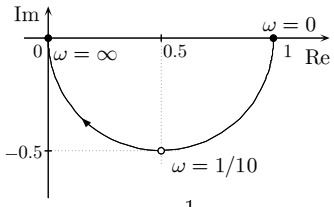
が得られ，1 次遅れ要素のナイキスト軌跡（点 $(x,\ y)$ の軌跡）は複素平面上で中心 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，半径 $\dfrac{1}{2}$ の円となる．

問題 **6.6** の解答

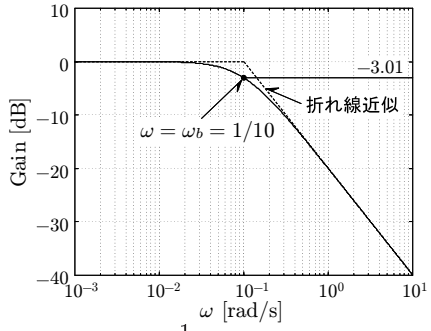
1 次遅れ要素

$$P(s) = \frac{1}{1 + 10s}$$

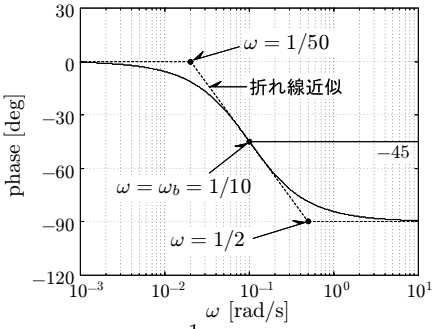
は時定数が $T = 10$ であるから，本書の図 **6.9**, **6.7**（本書の 119 頁）より，ベクトル軌跡，ボード線図は解答図 **(a)** ∼ **(c)** となる．



解答図 (a) $P(s) = \dfrac{1}{1+10s}$ のベクトル軌跡



解答図 (b) $P(s) = \dfrac{1}{1+10s}$ のボード線図 (ゲイン特性)



解答図 (c) $P(s) = \dfrac{1}{1+10s}$ のボード線図 (位相特性)

問題 6.7 の解答

(1) $P(s) = \dfrac{1}{(s+1)(10s+1)}$ は

$$\begin{cases} 1 \text{ 次遅れ要素：} P_1(s) = \dfrac{1}{1+T_1 s},\ T_1 = 1 \\ 1 \text{ 次遅れ要素：} P_2(s) = \dfrac{1}{1+T_2 s},\ T_2 = 10 \end{cases}$$

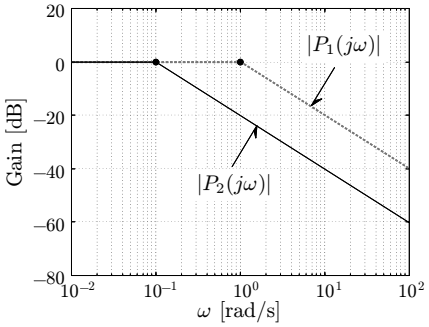
とすると，$P(s) = P_1(s)P_2(s)$ である．

$P_1(s),\ P_2(s)$ は共に 1 次遅れ要素であるから，$P_1(s)$ のゲイン特性の折れ点は $\omega = \dfrac{1}{T_1} = 1 = 10^0$，$P_1(s)$ のゲイン特性の折れ点周波数は $\omega = \dfrac{1}{T_2} = \dfrac{1}{10} = 10^{-1}$ であり，$P_1(s),\ P_2(s)$ のゲイン特性の折れ線近似は解答図 (a) のようになる．

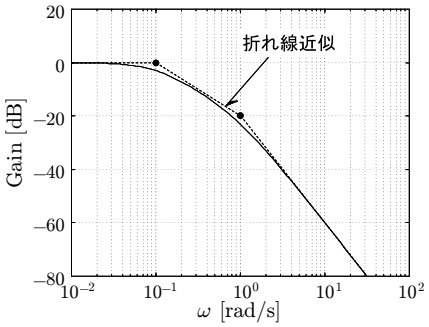
$P(s) = P_1(s)P_2(s)$ のゲイン特性は，$P_1(s),\ P_2(s)$ のゲイン特性を足した

$$20\log_{10}|P(j\omega)| = \sum_{i=1}^{2} 20\log_{10}|P_i(j\omega)|$$

であるから，解答図 (b) のようになる．



解答図 (a)　$P_1(s),\ P_2(s)$ のゲイン特性



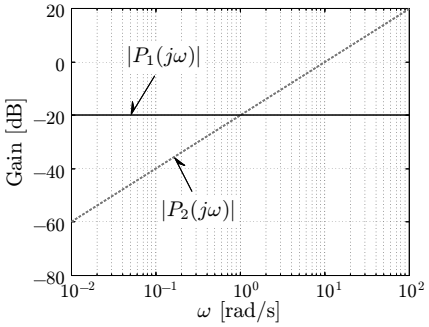
解答図 (b)　$P(s) = P_1(s)P_2(s)$ のゲイン特性

(2) $P(s) = \dfrac{s(s+1)}{10(10s+1)}$ は

$$\begin{cases} \text{比例要素：} & P_1(s) = \dfrac{1}{10} \\ \text{微分要素：} & P_2(s) = s \\ \text{1 次進み要素：} & P_3(s) = 1 + T_3 s,\ T_3 = 1 \\ \text{1 次遅れ要素：} & P_4(s) = \dfrac{1}{1+T_4 s},\ T_4 = 10 \end{cases}$$

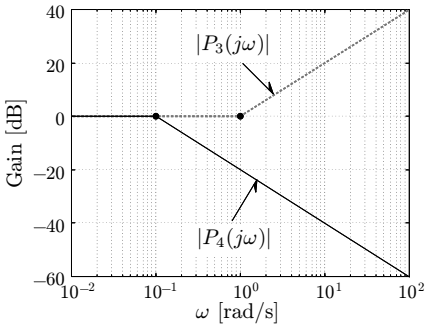
とすると，$P(s) = P_1(s)P_2(s)P_3(s)P_4(s)$ である．

$P_1(s)$, $P_2(s)$ はそれぞれ比例要素，微分要素であるから，$P_1(s)$, $P_2(s)$ のゲイン特性は解答図 (a) のようになる．



解答図 (a) $P_1(s)$, $P_2(s)$ のゲイン特性

また，$P_3(s)$, $P_4(s)$ はそれぞれ 1 次進み要素，1 次遅れ要素であるから，折れ点周波数は $\omega = \dfrac{1}{T_3} = 1 = 10^0$, $\omega = \dfrac{1}{T_4} = \dfrac{1}{10} = 10^{-1}$ であり，$P_3(s)$, $P_4(s)$ のゲイン特性は解答図 (b) のようになる．

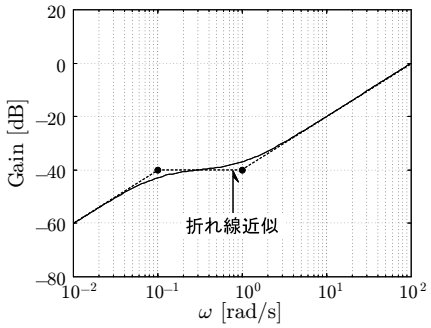


解答図 (b) $P_3(s)$, $P_4(s)$ のゲイン特性

$P(s) = P_1(s)P_2(s)P_3(s)P_4(s)$ のゲイン特性は，$P_1(s)$, $P_2(s)$, $P_3(s)$, $P_4(s)$ のゲイン特性を足した

$$20\log_{10}|P(j\omega)| = \sum_{i=1}^{4} 20\log_{10}|P_i(j\omega)|$$

であるから，解答図 (c) のようになる．



解答図 (c)　$P(s) = P_1(s)P_2(s)P_3(s)P_4(s)$ のゲイン特性

(3)　$P(s) = \dfrac{1}{(s+1)^4}$ は

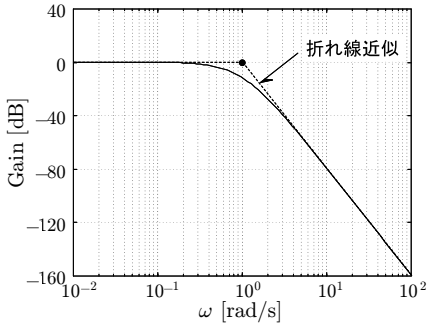
$$1 \text{ 次遅れ要素：} P_1(s) = \frac{1}{1+T_1 s},\ T_1 = 1$$

とすると，$P(s) = P_1(s)^4$ である．

$P(s) = P_1(s)^4$ のゲイン特性は，$P_1(s)$ のゲイン特性を 4 回足した

$$20\log_{10}|P(j\omega)| = 4\times 20\log_{10}|P_1(j\omega)|$$

であるから，解答図に示すように，折れ点周波数 $\omega = \dfrac{1}{T_1} = 1 = 10^0$ より小さい周波数では 0 [dB] で一定，折れ点周波数 $\omega = 10^0$ より大きい周波数では $4\times(-20) = -80$ [dB/dec] で小さくなっていく．



解答図　$P(s) = P_1(s)^4$ のゲイン特性

問題 **6.8** の解答

(1)　むだ時間要素 $P(s)=e^{-Ls}$ の周波数伝達関数 $P(j\omega)$ は，オイラーの公式より

$$P(j\omega)=e^{-j\omega L}=\cos\omega L-j\sin\omega L$$

となるから，$|P(j\omega)|$, $\angle P(j\omega)$ は

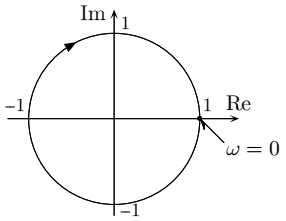
$$|P(j\omega)|=|\cos\omega L-j\sin\omega L|=\sqrt{\cos^2\omega L+\sin^2\omega L}=1$$

$$\angle P(j\omega)=\tan^{-1}\left(-\frac{\sin\omega L}{\cos\omega L}\right)=\tan^{-1}(-\tan\omega L)=-\omega L$$

である．したがって，ω にかかわらず $P(j\omega)$ の大きさは $|P(j\omega)|=1$ で一定，ω が大きくなるにしたがって位相 $\angle P(j\omega)$ は負側に大きくなるから，ベクトル軌跡は原点を中心とした半径 1 の円上を時計回りに回転する．ただし，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ に対し

$$\begin{cases}
(1,\ 0\cdot j)\text{ で交わる：} & \omega L=2n\pi \longrightarrow \omega=\dfrac{2n\pi}{L} \\
 & \qquad =0,\ \dfrac{2\pi}{L},\ \dfrac{4\pi}{L},\ \cdots \\
(0,\ -j)\text{ で交わる：} & \omega L=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi \longrightarrow \omega=\dfrac{(2n+1/2)\pi}{L} \\
 & \qquad =\dfrac{\pi}{2L},\ \dfrac{5\pi}{2L},\ \dfrac{9\pi}{2L},\ \cdots \\
(-1,\ 0\cdot j)\text{ で交わる：} & \omega L=\pi+2n\pi \longrightarrow \omega=\dfrac{(2n+1)\pi}{L} \\
 & \qquad =\dfrac{\pi}{L},\ \dfrac{3\pi}{L},\ \dfrac{5\pi}{L},\ \cdots \\
(0,\ j)\text{ で交わる：} & \omega L=\dfrac{3\pi}{2}+2n\pi \longrightarrow \omega=\dfrac{(2n+3/2)\pi}{L} \\
 & \qquad =\dfrac{3\pi}{2L},\ \dfrac{7\pi}{2L},\ \dfrac{11\pi}{2L},\ \cdots
\end{cases}$$

である．



解答図　$P(s)=e^{-Ls}$ のベクトル軌跡

(2)　$P(s)=\dfrac{e^{-Ls}}{1+Ts}$ の周波数伝達関数 $P(j\omega)$ は，オイラーの公式より

$$P(j\omega) = \frac{e^{-j\omega L}}{1+j\omega T} = \frac{\cos\omega L - j\sin\omega L}{1+j\omega T}$$

となるから，$|P(j\omega)|$, $\angle P(j\omega)$ は

$$|P(j\omega)| = \frac{|\cos\omega L - j\sin\omega L|}{|1+j\omega T|} = \frac{\sqrt{\cos^2\omega L + \sin^2\omega L}}{\sqrt{1^2+(\omega T)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}$$

$$\angle P(j\omega) = \tan^{-1}\left(-\frac{\sin\omega L}{\cos\omega L}\right) - \tan^{-1}\omega T = -\big(\omega L + \tan^{-1}\omega T\big)$$

である．

$\omega = 0$ のとき，

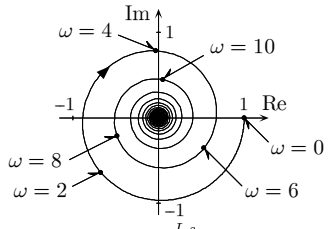
$$|P(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(0\times T)^2}} = 1$$

$$\angle P(j\omega) = -\big\{0\times L + \tan^{-1}(0\times T)\big\} = 0$$

であるから，ベクトル軌跡の始点は点 $(0,\ j\cdot 1)$ であり，$\omega = \infty$ のとき，

$$|P(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\infty\times T)^2}} = 0$$

であるから，ベクトル軌跡の終点は原点 $(0,\ j\cdot 0)$ である．また，位相 $\angle P(j\omega) = -\big(\omega L + \tan^{-1}\omega T\big)$ は ω が大きくなるにしたがい単調減少（負側に大きくなる），大きさ $|P(j\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}$ は ω が大きくなるにしたがい単調減少して 0 に近づく．したがって，ベクトル軌跡は渦巻き状に点 $(0,\ j\cdot 1)$ から原点 $(0,\ j\cdot 0)$ に収束していく．



解答図　$P(s) = \dfrac{e^{-Ls}}{1+Ts}$ のベクトル軌跡

問題 6.9 の解答 (MATLAB)

問題 **6.7** で与えられた伝達関数

(1)　$P(s) = \dfrac{1}{(s+1)(10s+1)}$　　(2)　$P(s) = \dfrac{s(s+1)}{10(10s+1)}$

(3)　$P(s) = \dfrac{1}{(s+1)^4}$

のボード線図を MATLAB により描くには M ファイル

```
% ex_bode.m
% ボード線図

clear;                          % メモリ上のデータを消去
format compact;                 % 表示の省スペース化

s = tf('s');                    % ラプラス演算子の定義
sysP1 = 1/((s+1)*(10*s+1));     % 問題 6.7 (1) の P(s)
sysP2 = s*(s+1)/(10*(10*s+1));  % 問題 6.7 (2) の P(s)
sysP3 = 1/(s+1)^4;              % 問題 6.7 (3) の P(s)

figure(1); bode(sysP1);         % 問題 6.7 (1) のボード線図
figure(2); bode(sysP2);         % 問題 6.7 (2) のボード線図
figure(3); bode(sysP3);         % 問題 6.7 (3) のボード線図
```

あるいは

```
% ex_bode2.m
% ボード線図

clear;                          % メモリ上のデータを消去
format compact;                 % 表示の省スペース化

s = tf('s');                    % ラプラス演算子の定義
sysP1 = 1/((s+1)*(10*s+1));     % 問題 6.7 (1) の P(s)
sysP2 = s*(s+1)/(10*(10*s+1));  % 問題 6.7 (2) の P(s)
sysP3 = 1/(s+1)^4;              % 問題 6.7 (3) の P(s)

w = logspace(-2,2,100);         % 周波数データ

[Gg1,Gp1] = bode(sysP1,w);      % 問題 6.7 (1) のゲイン , 位相差
figure(1); semilogx(w,20*log10(Gg1(:,:))); grid;    % ゲイン特性の描画
xlabel('frequency [rad/s]'); ylabel('Gain [dB]');
figure(2); semilogx(w,Gp1(:,:)); grid;              % 位相特性の描画
xlabel('frequency [rad/s]'); ylabel('phase [deg]');

[Gg2,Gp2] = bode(sysP2,w);      % 問題 6.7 (2) のゲイン , 位相差
figure(3); semilogx(w,20*log10(Gg2(:,:))); grid;    % ゲイン特性の描画
xlabel('frequency [rad/s]'); ylabel('Gain [dB]');
figure(4); semilogx(w,Gp2(:,:)); grid;              % 位相特性の描画
xlabel('frequency [rad/s]'); ylabel('phase [deg]');

[Gg3,Gp3] = bode(sysP3,w);      % 問題 6.7 (3) のゲイン , 位相差
figure(5); semilogx(w,20*log10(Gg3(:,:))); grid;    % ゲイン特性の描画
```

```
xlabel('frequency [rad/s]'); ylabel('Gain [dB]');
figure(6); semilogx(w,Gp3(:,:)); grid;              % 位相特性の描画
xlabel('frequency [rad/s]'); ylabel('phase [deg]');
```

を作成する．ただし，MATLAB Ver.5.0 ～ 5.2 の場合，ラプラス演算子の定義 `s = tf('s')` を使用できないので，

(1) $P(s) = \dfrac{1}{(s+1)(10s+1)} = \dfrac{\frac{1}{10}}{(s+1)\left(s+\frac{1}{10}\right)}$

(2) $P(s) = \dfrac{s(s+1)}{10(10s+1)} = \dfrac{\frac{1}{100}s(s+1)}{s+\frac{1}{10}}$

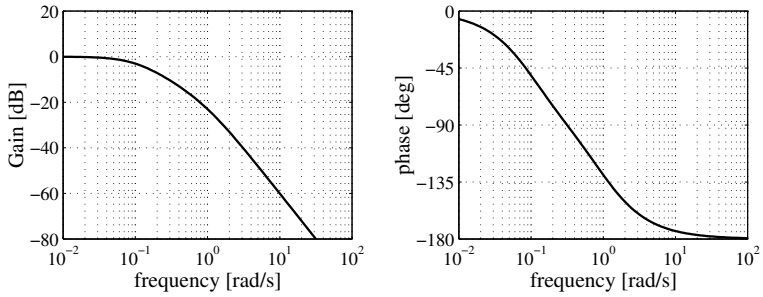
(3) $P(s) = \dfrac{1}{(s+1)^4}$

と書き換え，sysP1, sysP2, sysP3 をたとえば以下のようにして定義する．

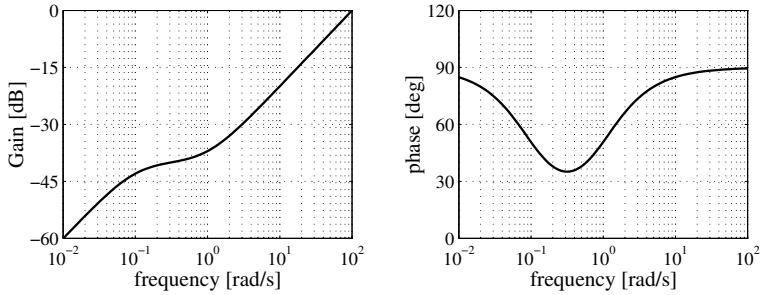
```
z1 = [];                % 零点  : なし
p1 = [-1; -1/10];       % 極    : -1,-1/10
k1 = [1/10];            % ゲイン : 1/10
sysP1 = zpk(z1,p1,k1);  % P(s)

z2 = [0; -1];           % 零点  : 0,-1
p2 = [-1/10];           % 極    : -1/10
k2 = [1/100];           % ゲイン : 1/100
sysP2 = zpk(z2,p2,k2);  % P(s)

z3 = [];                % 零点  : なし
p3 = [-1; -1; -1; -1];  % 極    : -1,-1,-1,-1
k3 = [1];               % ゲイン : 1
sysP3 = zpk(z3,p3,k3);  % P(s)
```

M ファイル ex_bode2.m を実行すると，つぎの実行結果が得られる．

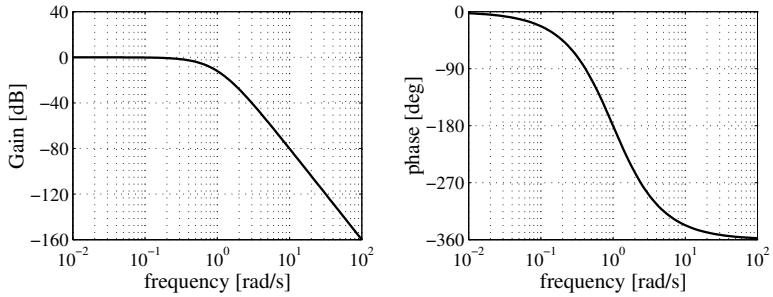
```
》 ex_bode2 ↵ ..... ex_bode2.m の実行
```



解答図　問題 **6.7** (1)



解答図　問題 **6.7** (2)



解答図　問題 **6.7** (3)

問題 6.10 の解答 (MATLAB)

問題 **6.7** で与えられた伝達関数

(1) $P(s) = \dfrac{1}{(s+1)(10s+1)}$ (2) $P(s) = \dfrac{s(s+1)}{10(10s+1)}$

(3) $P(s) = \dfrac{1}{(s+1)^4}$

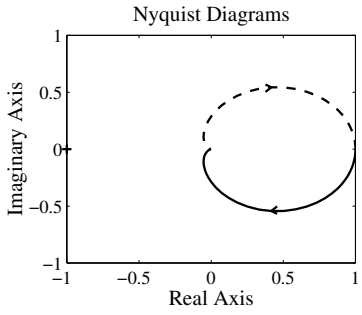
のナイキスト軌跡を MATLAB により描くにはたとえば，M ファイル

```
% ex_nyquist.m
% ナイキスト軌跡

clear;                          % メモリ上のデータを消去
format compact;                 % 表示の省スペース化

s = tf('s');                    % ラプラス演算子の定義
sysP1 = 1/((s+1)*(10*s+1));     % 問題 6.7 (1) の P(s)
sysP2 = s*(s+1)/(10*(10*s+1));  % 問題 6.7 (2) の P(s)
sysP3 = 1/(s+1)^4;              % 問題 6.7 (3) の P(s)

figure(1); nyquist(sysP1);      % 問題 6.7 (1) のナイキスト軌跡
figure(2); nyquist(sysP2);      % 問題 6.7 (2) のナイキスト軌跡
figure(3); nyquist(sysP3);      % 問題 6.7 (3) のナイキスト軌跡
```

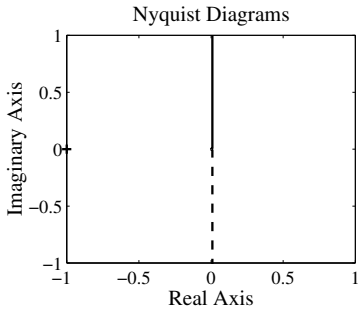
を作成する．ただし，MATLAB Ver.5.0 ∼ 5.2 の場合，ラプラス演算子の定義 `s = tf('s')` を使用できないので，sysP1, sysP2, sysP3 を問題 **6.10** の解答で示したように定義する必要がある．

M ファイル `ex_nyquist.m` を実行した結果を以下に示す．

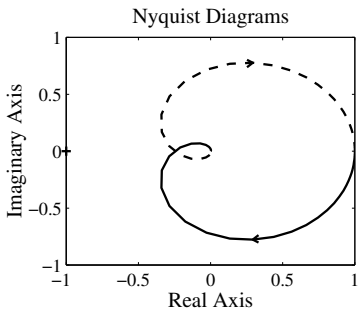
```
》 ex_nyquist ↵ ..... ex_nyquist.m の実行
```



(a) 問題 **6.7** (1)



(b) 問題 **6.7** (2)


Nyquist Diagrams
Imaginary Axis
Real Axis
1
0.5
0
−0.5
−1
−1
−0.5
0
0.5
1

(c) 問題 **6.7** (3)
解答図

第 7 章

7 章の解答

問題 7.1 の解答

制御対象 $P(s)$，コントローラ $C(s)$ は

$$P(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2},\ C(s) = k_P > 0$$

であるから，開ループ伝達関数 $L(s) := P(s)C(s)$ は

$$L(s) := P(s)C(s) = \frac{k_P\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

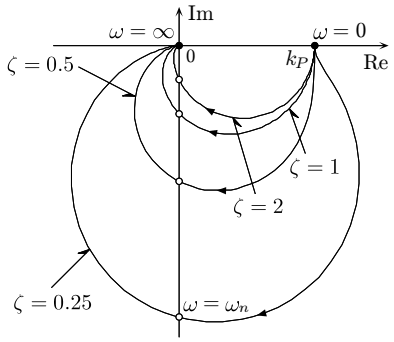
であり，$|L(j\omega)|$, $\angle L(j\omega)$ は次式となる．

$$L(j\omega) = \frac{k_P\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n \cdot j\omega + \omega_n^2} = \frac{k_P\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + j\cdot 2\zeta\omega_n\omega}$$

$$= \frac{k_P}{1 - \eta^2 + j\cdot 2\zeta\eta},\ \eta = \frac{\omega}{\omega_n}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} |L(j\omega)| = \dfrac{k_P}{|1 - \eta^2 + j\cdot 2\zeta\eta|} = \dfrac{k_P}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}} \\ \angle L(j\omega) = -\tan^{-1}\dfrac{2\zeta\eta}{1 - \eta^2} \end{cases}$$

したがって，



解答図　$L(s)$ のベクトル軌跡

$\omega = 0$ $(\eta = 0)$ のとき　$|L(j\omega)| = k_P,\ \angle L(j\omega) = 0$ [deg]

$\omega = \omega_n$ $(\eta = 1)$ のとき　$|L(j\omega)| = \dfrac{k_P}{2\zeta},\ \angle L(j\omega) = -90$ [deg]

$\omega = \infty$ $(\eta = \infty)$ のとき　$|L(j\omega)| = 0,\ \angle L(j\omega) = -180$ [deg]

であるから，$L(s)$ のベクトル軌跡は解答図のようになる．

つまり，複素ベクトル $L(j\omega)$ は始点 $(k_P,\ 0{\cdot}j)$ から時計回りに終点 $(0,\ 0{\cdot}j)$ に向かう．そのため，$k_P > 0$ がどのような値でも，$L(j\omega)$ は $(-1,\ 0{\cdot}j)$ を常に左側に見るから，閉ループシステムは常に安定である．

問題 7.2 の解答

(1)　制御対象 $P(s)$，コントローラ $C(s)$ は

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)},\ C(s) = k_P > 0$$

である．

ナイキストの安定判別法

開ループ伝達関数 $L(s) := P(s)C(s)$ の $|L(j\omega)|,\ \angle L(j\omega)$ は

$$L(s) := P(s)C(s) = \frac{k_P}{(s+1)^2(s+2)}$$

$$\longrightarrow \quad L(j\omega) = \frac{k_P}{(1+j\omega)^2(2+j\omega)}$$

$$\longrightarrow \quad \begin{cases} |L(j\omega)| = \dfrac{k_P}{|1+j\omega|^2|2+j\omega|} = \dfrac{k_P}{(1+\omega^2)\sqrt{4+\omega^2}} \\ \angle L(j\omega) = -\left(2\tan^{-1}\omega + \tan^{-1}\dfrac{\omega}{2}\right) \end{cases}$$

である．また，

$$\begin{aligned} L(j\omega) &= \frac{k_P}{(1+j\omega)^2(2+j\omega)} = \frac{k_P}{(1-\omega^2+j{\cdot}2\omega)(2+j\omega)} \\ &= \frac{k_P}{2(1-\omega^2) - 2\omega^2 + j\{\omega(1-\omega^2)+4\omega\}} \\ &= \frac{k_P}{2(1-2\omega^2) + j\omega(5-\omega^2)} \\ &= \frac{k_P\{2(1-2\omega^2) - j\omega(5-\omega^2)\}}{\{2(1-2\omega^2) + j\omega(5-\omega^2)\}\{2(1-2\omega^2) - j\omega(5-\omega^2)\}} \\ &= \frac{k_P\{2(1-2\omega^2) - j\omega(5-\omega^2)\}}{4(1-2\omega^2)^2 + \omega^2(5-\omega^2)^2} \end{aligned}$$

である．したがって，$\angle L(j\omega) = -180$ [deg] となる，すなわち，$L(s)$ のベクトル軌跡が実軸と交わる周波数 $\omega = \omega_{pc}$ は

$$\mathrm{Im}\big[L(j\omega)\big] = -\frac{k_P\omega(5-\omega^2)}{4(1-2\omega^2)^2+\omega^2(5-\omega^2)^2} = 0 \ (\omega>0)$$

$$\longrightarrow \quad 5-\omega^2 = 0 \ (\omega>0)$$

$$\longrightarrow \quad \omega = \omega_{pc} = \sqrt{5}$$

であるから，$k_P > 0$ のときの安定条件は

$$|L(j\omega_{pc})| = \frac{k_P}{(1+\omega_{pc}^2)\sqrt{4+\omega_{pc}^2}} < 1$$

$$\longrightarrow \quad \frac{k_P}{(1+5)\sqrt{4+5}} = \frac{k_P}{18} < 1$$

$$\longrightarrow \quad 0 < k_P < 18$$

となる．

ラウス・フルビッツの安定判別法

$N_P(s) = 1,\ D_P(s) = (s+1)^2(s+2),\ N_C(s) = k_P,\ D_C(s) = 1$ とおくと，

$$P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)},\ C(s) = \frac{N_C(s)}{D_C(s)}$$

であり，特性方程式は次式となる．

$$\begin{aligned}\Delta(s) &= D_P(s)D_C(s) + N_P(s)N_C(s) = (s+1)^2(s+2)\times 1 + 1\times k_P \\ &= s^3 + 4s^2 + 5s + 2 + k_P \\ &= a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 \\ &= 0\end{aligned}$$

ただし，

$$a_3 = 1,\ a_2 = 4,\ a_1 = 5,\ a_0 = 2 + k_P$$

である．

ここでは，フルビッツの安定判別法を利用する．

(条件 I)　$a_i > 0$ となるためには

$$a_0 = 2 + k_P > 0 \quad \longrightarrow \quad k_P > -2$$

でなければならない．

(条件 II)　本書 (4.34) 式 (本書 71 頁) の行列 $\boldsymbol{H}$ は

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2+k_P & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 2+k_P \end{bmatrix}$$

である．また，$n = 3$ より $k = 1$ であるから，

$$\begin{aligned} H_2 &= \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2+k_P \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 4\times 5 - (2+k_P)\times 1 = 18 - k_P > 0\end{aligned}$$

でなければならないから，$k_P < 18$ が得られる．

したがって，条件 I, II および $k_P > 0$ より安定条件 $0 < k_P < 18$ が得られる．

(2) 制御対象 $P(s)$，コントローラ $C(s)$ は

$$P(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)},\ C(s) = k_P > 0$$

である．

ナイキストの安定判別法

開ループ伝達関数 $L(s) := P(s)C(s)$ の $|L(j\omega)|, \angle L(j\omega)$ は

$$L(s) := P(s)C(s) = \frac{k_P}{s(s+1)(s+2)}$$

$$\longrightarrow \quad L(j\omega) = \frac{k_P}{j\omega(1+j\omega)(2+j\omega)}$$

$$\longrightarrow \quad \begin{cases} |L(j\omega)| = \dfrac{k_P}{|j\omega||1+j\omega||2+j\omega|} = \dfrac{k_P}{\omega\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{4+\omega^2}} \\ \qquad\qquad = \dfrac{k_P}{\omega\sqrt{(1+\omega^2)(4+\omega^2)}} \\ \angle L(j\omega) = -\left(90 + \tan^{-1}\omega + \tan^{-1}\dfrac{\omega}{2}\right)\ [\mathrm{deg}] \end{cases}$$

である．また，

$$\begin{aligned} L(j\omega) &= \frac{k_P}{j\omega(1+j\omega)(2+j\omega)} = \frac{k_P}{j\omega(2-\omega^2+j\cdot 3\omega)} \\ &= \frac{k_P}{-3\omega^2 + j\omega(2-\omega^2)} \\ &= \frac{k_P\{-3\omega^2 - j\omega(2-\omega^2)\}}{\{-3\omega^2 + j\omega(2-\omega^2)\}\{-3\omega^2 - j\omega(2-\omega^2)\}} \\ &= -\frac{k_P\{3\omega^2 + j\omega(2-\omega^2)\}}{9\omega^4 + \omega^2(2-\omega^2)^2} \end{aligned}$$

である．したがって，$\angle L(j\omega) = -180\ [\mathrm{deg}]$ となる，すなわち，$L(s)$ のベクトル軌跡が実軸と交わる周波数 $\omega = \omega_{pc}$ は

$$\mathrm{Im}\big[L(j\omega)\big] = -\frac{k_P\omega(2-\omega^2)}{9\omega^4 + \omega^2(2-\omega^2)^2} = 0\ (\omega > 0)$$

$$\longrightarrow \quad 2 - \omega^2 = 0\ (\omega > 0)$$

$$\longrightarrow \quad \omega = \omega_{pc} = \sqrt{2}$$

であるから，$k_P > 0$ のときの安定条件は

$$|L(j\omega_{pc})| = \frac{k_P}{\omega_{pc}\sqrt{(1+\omega_{pc}^2)(4+\omega_{pc}^2)}} < 1$$

$$\longrightarrow \quad \frac{k_P}{\sqrt{2}\sqrt{(1+2)(4+2)}} = \frac{k_P}{6} < 1$$

$$\longrightarrow \quad 0 < k_P < 6$$

となる．

ラウス・フルビッツの安定判別法

$N_P(s) = 1,\ D_P(s) = s(s+1)(s+2),\ N_C(s) = k_P,\ D_C(s) = 1$ とおくと，

$$P(s) = \frac{N_P(s)}{D_P(s)},\ C(s) = \frac{N_C(s)}{D_C(s)}$$

であり，特性方程式は次式となる．

$$\begin{aligned}\Delta(s) &= D_P(s)D_C(s) + N_P(s)N_C(s) = s(s+1)(s+2)\times 1 + 1\times k_P \\ &= s^3 + 3s^2 + 2s + k_P \\ &= a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 \\ &= 0\end{aligned}$$

ただし，

$$a_3 = 1,\ a_2 = 3,\ a_1 = 2,\ a_0 = k_P$$

である．

ここでは，フルビッツの安定判別法を利用する．

(条件 **I**)　$a_i > 0$ となるためには

$$a_0 = k_P > 0$$

でなければならない．

(条件 **II**)　本書 (4.34) 式 (本書 71 頁) の行列 $\boldsymbol{H}$ は

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & k_P & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & k_P \end{bmatrix}$$

である．また，$n = 3$ より $k = 1$ であるから，

$$\begin{aligned}H_2 &= \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & k_P \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 3\times 2 - k_P \times 1 = 6 - k_P > 0\end{aligned}$$

でなければならないから，$k_P < 6$ が得られる．

したがって，条件 I, II および $k_P > 0$ より安定条件 $0 < k_P < 6$ が得られる．

問題 **7.3** の解答

(1)　制御対象 $P(s)$，コントローラ $C(s)$ が

$$P(s)=\frac{1}{(s+10)^4},\ C(s)=k_P>0$$

であるとき，

$$L(s):=P(s)C(s)=\frac{k_P}{(s+10)^4}$$

$$\longrightarrow\quad L(j\omega)=\frac{k_P}{(10+j\omega)^4}$$

$$\longrightarrow\quad \begin{cases} |L(j\omega)|=\dfrac{k_P}{|10+j\omega|^4}=\dfrac{k_P}{\left(\sqrt{10^2+\omega^2}\right)^4}=\dfrac{k_P}{(100+\omega^2)^2} \\ \angle L(j\omega)=-4\tan^{-1}\dfrac{\omega}{10} \end{cases}$$

である．

位相交差周波数 ω_{pc}，ゲイン余裕 G_M

位相交差周波数 ω_{pc} は $\angle L(j\omega)=-180$ [deg] となる ω であるから，

$$\angle L(j\omega_{pc})=-4\tan^{-1}\frac{\omega_{pc}}{10}=-180\ [\mathrm{deg}]$$

$$\longrightarrow\quad \tan^{-1}\frac{\omega_{pc}}{10}=45\ [\mathrm{deg}]$$

$$\longrightarrow\quad \frac{\omega_{pc}}{10}=\tan 45=1$$

$$\longrightarrow\quad \omega_{pc}=10\ [\mathrm{rad/s}]$$

である．また，ゲイン余裕 G_M は

$$G_M=-20\log_{10}|L(j\omega_{pc})|=-20\log_{10}\frac{k_P}{(100+\omega_{pc}^2)^2}$$

$$=-20\log_{10}\frac{k_P}{200^2}=-20\log_{10}\left(\frac{k_P}{4}\times 10^{-4}\right)$$

$$=80-20\log_{10}\frac{k_P}{4}\ [\mathrm{dB}]$$

ゲイン交差周波数 ω_{gc}，位相余裕 P_M

ゲイン交差周波数 ω_{gc} は $|L(j\omega)|=1$ となる ω であるから，

$$|L(j\omega_{gc})|=\frac{k_P}{(100+\omega_{gc}^2)^2}=1$$

$$\longrightarrow\quad (100+\omega_{gc}^2)^2=k_P$$

$$\longrightarrow\quad \omega_{gc}^2=k_P^{1/2}-100$$

$$\longrightarrow\quad \omega_{gc}=\sqrt{k_P^{1/2}-100}\ [\mathrm{rad/s}]\quad (k_P>10^4)$$

である．また，位相余裕 P_M は

$$P_M = 180 + \angle L(j\omega_{gc}) = 180 - 4\tan^{-1}\frac{\omega_{gc}}{10}$$

$$= 180 - 4\tan^{-1}\frac{\sqrt{k_P^{1/2} - 100}}{10}\ [\mathrm{deg}] \quad (k_P > 10^4)$$

(2) $P_M = 60$ [deg] であるから，

$$P_M = 180 - 4\tan^{-1}\frac{\sqrt{k_P^{1/2} - 100}}{10} = 60$$

$$\longrightarrow \quad 4\tan^{-1}\frac{\sqrt{k_P^{1/2} - 100}}{10} = 120 \quad \longrightarrow \quad \tan^{-1}\frac{\sqrt{k_P^{1/2} - 100}}{10} = 30$$

$$\longrightarrow \quad \frac{\sqrt{k_P^{1/2} - 100}}{10} = \tan 30 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \longrightarrow \quad \sqrt{k_P^{1/2} - 100} = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

$$\longrightarrow \quad k_P^{1/2} - 100 = \frac{100}{3} \quad \longrightarrow \quad k_P^{1/2} = \frac{400}{3}$$

$$\longrightarrow \quad k_P = \frac{160000}{9} = \frac{16}{9} \times 10^4$$

問題 7.4 の解答 (MATLAB)

M ファイル ex_margin.m

```
% ex_margin.m
% 安定余裕

clear;                              % メモリ上のデータを消去
format compact;                     % 表示の省スペース化

s = tf('s');                        % ラプラス演算子の定義
sysP = 1/(s + 10)^4;                % P(s) = 1/(s + 10)^4
kP = (16/9)*10^4;                   % 比例ゲイン kP
sysC = kP;                          % C(s) = kP
sysL = sysP*sysC;                   % 開ループ伝達関数 L(s) = P(s)*C(s)

[Gm0,Pm,wpc,wgc] = margin(sysL) % 安定余裕
Gm = 20*log10(Gm0)                  % ゲイン余裕のデシベル表示
```

を作成する．ただし，MATLAB Ver.5.0 ∼ 5.2 の場合，ラプラス演算子の定義 `s = tf('s')` を使用できないので，sysP をたとえば

```
z = [];                             % 零点   : なし
p = [-1; -1; -1; -1];               % 極     : -1,-1,-1,-1
```

```
k = [1];                          % ゲイン：1
sysP = zpk(z,p,k);                % P(s)
```

のように定義する．M ファイル ex_margin.m を実行すると，以下の結果が得られ，問題 **7.3** で設計したように，位相余裕 P_M が 60 [deg] であることが確認できる．

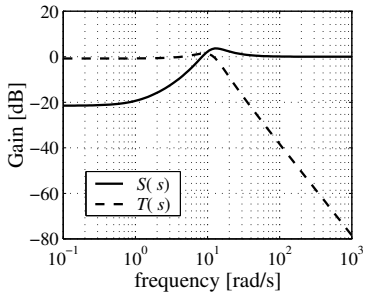
```
》 ex_margin ↵ ..... ex_margin.m の実行
Gm0 = ..... ゲイン余裕 1/|L(jω_pc)| = 2.25
    2.2500
Pm = ..... 位相余裕 P_M = ∠L(jω_gc) = 60 [deg]
   60.0000
wpc = ..... 位相交差周波数 ω_pc = 10 [rad/s]
    10
wgc = ..... ゲイン交差周波数 ω_gc = 5.7735 [rad/s]
    5.7735
Gm = ..... ゲイン余裕 G_M = −20log10|L(jω_pc)| = 7.0437 [dB]
    7.0437
```

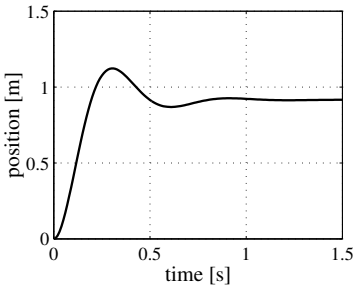
問題 7.5 の解答 (MATLAB)

P コントローラを用いる場合，以下の M ファイル ex_margin_P.m を作成する．

```
% ex_margin_P.m
% 安定余裕

clear;                            % メモリ上のデータを消去
format compact;                   % 表示の省スペース化

l  = 0.204;                       % アームの軸から重心までの距離
M  = 0.390;                       % アームの質量
J  = 0.0712;                      % 慣性モーメント
c  = 0.695;                       % 軸の粘性摩擦係数
g  = 9.81;                        % 重力加速度

sysP = tf([1],[J c M*l*g]);       % P(s)

kP = 8.5;                         % 比例ゲイン kP
sysC = kP;                        % C(s) = kP
sysL = sysP*sysC;                 % L(s) = P(s)*C(s)

[Gm0,Pm,wpc,wgc] = margin(sysL) % 安定余裕
Gm = 20*log10(Gm0)                % ゲイン余裕のデシベル表示
```

```
%%%
```





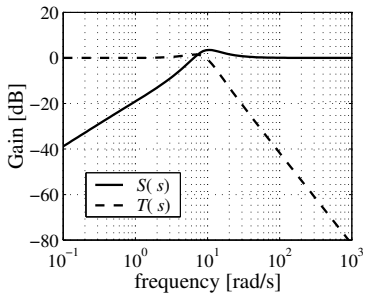
つぎに，PI コントローラを用いる場合，以下の M ファイル ex_margin_PI.m を作成する．

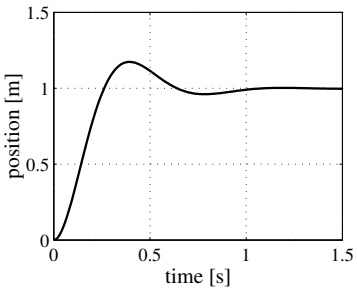
```
% ex_margin_PI.m
% 安定余裕

clear;                              % メモリ上のデータを消去
format compact;                     % 表示の省スペース化

l  = 0.204;                         % アームの軸から重心までの距離
M  = 0.390;                         % アームの質量
J  = 0.0712;                        % 慣性モーメント
c  = 0.695;                         % 軸の粘性摩擦係数
g  = 9.81;                          % 重力加速度

sysP = tf([1],[J c M*l*g]);         % P(s)

kP = 5.8;                           % 比例ゲイン kP
TI = 0.85;                          % 積分時間 TI
kI = kP/TI;                         % 積分ゲイン kI = kP/TI
sysC = tf([kP kI],[1 0]);           % C(s)

sysL = sysP*sysC;                   % L(s) = P(s)*C(s)

[Gm0,Pm,wpc,wgc] = margin(sysL) % 安定余裕
Gm = 20*log10(Gm0)                  % ゲイン余裕のデシベル表示

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% S(s)，T(s) のゲイン特性
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
w = logspace(-1,3,100);             % 周波数データ

sysT = feedback(sysL,1);            % 相補感度関数 T(s)
sysS = 1 - sysT;                    % 感度関数 S(s)
```

```
[magT,phaseT] = bode(sysT,w);    % T(s) のゲイン，位相差
[magS,phaseS] = bode(sysS,w);    % S(s) のゲイン，位相差

figure(1); semilogx(w,20*log10(magS(:,:)),'r-',w,20*log10(magT(:,:)),'b--');
xlabel('frequency [rad/s]'); ylabel('Gain [dB]'); grid;
axis([10^(-1) 10^3 -80 20]);
legend('S(s)','T(s)');

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% ステップ応答
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
t = 0:0.01:1.5;                  % 時間データ

y = step(sysT,t);                % ステップ応答
figure(2); plot(t,y);
xlabel('time [s]'); ylabel('position [m]'); grid;
axis([0 1.5 0 1.5]);
```

M ファイル ex_margin_PI.m の実行結果を以下に示す．

```
》 ex_margin_PI ↵    ex_margin_PI.m の実行
Gm0 = ..... ゲイン余裕 1/|L(jω_pc)
   Inf
Pm = ..... 位相余裕 P_M = ∠L(jω_gc)
   50.2254
wpc = ..... 位相交差周波数 ω_pc [rad/s]
   NaN
wgc = ..... ゲイン交差周波数 ω_gc [rad/s]
    7.2771
Gm = ..... ゲイン余裕 G_M = −20log10|L(jω_pc)|
   Inf
```





最後に，PID コントローラを用いる場合，以下の M ファイル ex_margin_PID.m を作成する．

```
% ex_margin_PID.m
% 安定余裕

clear;                          % メモリ上のデータを消去
format compact;                 % 表示の省スペース化

l  = 0.204;                     % アームの軸から重心までの距離
M  = 0.390;                     % アームの質量
J  = 0.0712;                    % 慣性モーメント
c  = 0.695;                     % 軸の粘性摩擦係数
g  = 9.81;                      % 重力加速度

sysP = tf([1],[J c M*l*g]);     % P(s)

kP = 8.5;                       % 比例ゲイン kP
TI = 0.85;                      % 積分時間 TI
TD = 0.014;                     % 微分時間 TD
kI = kP/TI;                     % 積分ゲイン kI = kP/TI
kD = kP*TD;                     % 微分ゲイン kD = kP*TD

sysC = tf([kD kP kI],[1 0]);    % C(s)

sysL = sysP*sysC;               % L(s) = P(s)*C(s)

[Gm0,Pm,wpc,wgc] = margin(sysL) % 安定余裕
Gm = 20*log10(Gm0)              % ゲイン余裕のデシベル表示

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% S(s)，T(s) のゲイン特性
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
w = logspace(-1,3,100);         % 周波数データ

sysT = feedback(sysL,1);        % 相補感度関数 T(s)
sysS = 1 - sysT;                % 感度関数 S(s)

[magT,phaseT] = bode(sysT,w);   % T(s) のゲイン，位相差
[magS,phaseS] = bode(sysS,w);   % S(s) のゲイン，位相差

figure(1); semilogx(w,20*log10(magS(:,:)),'r-',w,20*log10(magT(:,:)),'b--');
xlabel('frequency [rad/s]'); ylabel('Gain [dB]'); grid;
axis([10^(-1) 10^3 -80 20]);
legend('S(s)','T(s)');

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
% ステップ応答
%%%
```

第8章

8 章の解答

問題 8.1 の解答

(1) 本書の例 **2.3** (本書の 15 頁) で示した台車系の運動方程式は

$$M\ddot{z}(t) = -c\dot{z}(t) + f(t)$$

である．ここで，状態変数 $\boldsymbol{x}(t)$，操作量 $u(t)$，制御量 $y(t)$ を

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix},\ u(t) = f(t),\ y(t) = z(t)$$

とすると，

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \frac{d}{dt}z(t) = \dot{z}(t) = x_2 \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{d}{dt}\dot{z}(t) = \ddot{z}(t) = \frac{1}{M}(-c\dot{z}(t) + f(t)) \\ &= \frac{1}{M}(-cx_2(t) + u(t)) \\ y(t) &= z(t) = x_1(t) \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_2(t) \\ \dfrac{1}{M}(-cx_2(t) + u(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\dfrac{c}{M}x_2(t) + \dfrac{1}{M}u(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{c}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = x_1(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる．したがって，状態空間表現のひとつは次式となる．

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}u(t) \\ y(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{c}{M} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

一方，$u(s)$ から $y(s)$ への伝達関数 $P(s)$ は

$$P(s) = \boldsymbol{C}\big(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\big)^{-1}\boldsymbol{B}$$

により求まるから，

$$
\begin{aligned}
P(s) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{c}{M} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s + \dfrac{c}{M} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{s\left(s + \dfrac{c}{M}\right)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + \dfrac{c}{M} & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix} \\
&= \frac{\dfrac{1}{M}}{s\left(s + \dfrac{c}{M}\right)} = \frac{1}{Ms^2 + cs}
\end{aligned}
$$

となる．

(2)　本書の例 **2.2** (本書の 12 頁) で示した RCL 回路の回路方程式は

$$
\begin{cases}
v_{in}(t) = Ri(t) + L\dfrac{d}{dt}i(t) + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i(\tau)d\tau \\
v_{out}(t) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i(\tau)d\tau
\end{cases}
$$

である．ここで，状態変数 $\boldsymbol{x}(t)$，操作量 $u(t)$，制御量 $y(t)$ を

$$
\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \displaystyle\int_0^t i(\tau)d\tau \\ i(t) \end{bmatrix}, \ u(t) = v_{in}(t), \ y(t) = v_{out}(t)
$$

とすると，

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= \frac{d}{dt}\int_0^t i(\tau)d\tau = i(t) = x_2 \\
\dot{x}_2(t) &= \frac{d}{dt}i(t) = \frac{1}{L}\left(-\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau - Ri(t) + v_{in}(t) \right) \\
&= \frac{1}{L}\left(-\frac{1}{C}x_1(t) - Rx_2(t) + u(t) \right) \\
y(t) &= \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau = \frac{1}{C}x_1(t)
\end{aligned}
$$

であるから，

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_2(t) \\ \dfrac{1}{L}\left(-\dfrac{1}{C}x_1(t) - Rx_2(t) + u(t)\right)\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\dfrac{1}{CL}x_1(t) - \dfrac{R}{L}x_1(t) + \dfrac{1}{L}u(t)\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{CL} & -\dfrac{R}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \dfrac{1}{L}\end{bmatrix}u(t) \\ y(t) = \frac{1}{C}x_1(t) &= \begin{bmatrix}\dfrac{1}{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

となる．したがって，状態空間表現のひとつは次式となる．

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}u(t) \\ y(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)\end{cases}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{CL} & -\dfrac{R}{L}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix}0\\ \dfrac{1}{L}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix}\dfrac{1}{C} & 0\end{bmatrix}$$

一方，$u(s)$ から $y(s)$ への伝達関数 $P(s)$ は

$$P(s) = \boldsymbol{C}\big(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\big)^{-1}\boldsymbol{B}$$

により求まるから，

$$\begin{aligned}P(s) &= \begin{bmatrix}\dfrac{1}{C} & 0\end{bmatrix}\left(s\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{CL} & -\dfrac{R}{L}\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{1}{L}\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}\dfrac{1}{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} s & -1 \\ \dfrac{1}{CL} & s + \dfrac{R}{L}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{1}{L}\end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s\left(s + \dfrac{R}{L}\right) + \dfrac{1}{CL}}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} s + \dfrac{R}{L} & 1 \\ -\dfrac{1}{CL} & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{1}{L}\end{bmatrix} \\ &= \frac{\dfrac{1}{CL}}{s^2 + \dfrac{R}{L}s + \dfrac{1}{CL}} = \frac{1}{CLs^2 + RCs + 1}\end{aligned}$$

となる．

問題 8.2 の解答

行列

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5\end{bmatrix}$$

の遷移行列 $e^{\boldsymbol{A}t}$ を

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \mathcal{L}^{-1}\left[\left(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\right)^{-1}\right]$$

により求める．

$s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ の逆行列は

$$\begin{aligned}
\left(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\right)^{-1} &= \left(s\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & -5\end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix}s & -1\\ 6 & s+5\end{bmatrix}^{-1} \\
&= \frac{1}{s^2+5s+6}\begin{bmatrix}s+5 & 1\\ -6 & s\end{bmatrix} = \frac{1}{(s+2)(s+3)}\begin{bmatrix}s+5 & 1\\ -6 & s\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}Q_{11}(s) & Q_{12}(s)\\ Q_{21}(s) & Q_{22}(s)\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

である．ここで，

$$\begin{aligned}
Q_{11}(s) &= \frac{s+5}{(s+2)(s+3)} = \frac{k_1}{s+2} + \frac{k_2}{s+3} \\
Q_{12}(s) &= \frac{1}{(s+2)(s+3)} = \frac{k_3}{s+2} + \frac{k_4}{s+3} \\
Q_{21}(s) &= \frac{-6}{(s+2)(s+3)} = \frac{k_5}{s+2} + \frac{k_6}{s+3} \\
Q_{22}(s) &= \frac{s}{(s+2)(s+3)} = \frac{k_7}{s+2} + \frac{k_8}{s+3}
\end{aligned}$$

のように部分分数分解する．ただし，

$$\begin{aligned}
k_1 &= (s+2)Q_{11}(s)|_{s=-2} = \left.\frac{s+5}{s+3}\right|_{s=-2} = 3 \\
k_2 &= (s+3)Q_{11}(s)|_{s=-3} = \left.\frac{s+5}{s+2}\right|_{s=-3} = -2 \\
k_3 &= (s+2)Q_{12}(s)|_{s=-2} = \left.\frac{1}{s+3}\right|_{s=-2} = 1 \\
k_4 &= (s+3)Q_{12}(s)|_{s=-3} = \left.\frac{1}{s+2}\right|_{s=-3} = -1 \\
k_5 &= (s+2)Q_{21}(s)|_{s=-2} = \left.\frac{-6}{s+3}\right|_{s=-2} = -6 \\
k_6 &= (s+3)Q_{21}(s)|_{s=-3} = \left.\frac{-6}{s+2}\right|_{s=-3} = 6 \\
k_7 &= (s+2)Q_{22}(s)|_{s=-2} = \left.\frac{s}{s+3}\right|_{s=-2} = -2 \\
k_8 &= (s+3)Q_{22}(s)|_{s=-3} = \left.\frac{s}{s+2}\right|_{s=-3} = 3
\end{aligned}$$

である．したがって，$\boldsymbol{A}$ の遷移行列 $e^{\boldsymbol{A}t}$ は

$$
\begin{aligned}
e^{\boldsymbol{A}t} &= \mathcal{L}^{-1}\left[\left(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\right)^{-1}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)(s+3)}\begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -6 & s \end{bmatrix}\right] \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} + \frac{1}{s+3}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}\right] \\
&= e^{-2t}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} + e^{-3t}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

となる．

第9章

グラフのカスタマイズ (MATLAB)

本書は LaTeX で作成されており，MATLAB で作成したグラフの見栄えをよくするため，フォント，フォントの大きさ，軸の目盛り，グラフの線の太さをなどをカスタマイズしている．ここでは，グラフのカスタマイズの方法について簡単に説明する．

9.1 コマンドでカスタマイズする方法

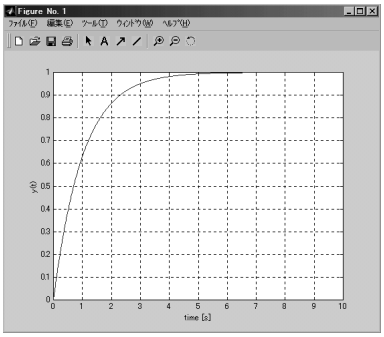
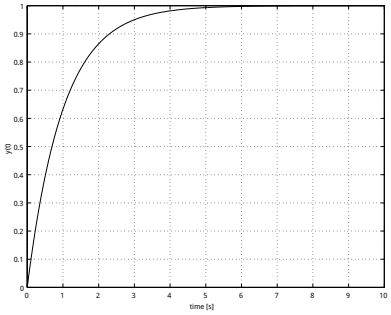
MATLAB でグラフを作成し，EPS ファイルを作成するために，単に

```
plot(t,y); ..... グラフのプロット
xlabel('time [s]') ..... 横軸のラベル
ylabel('y(t)') ..... 縦軸のラベル
grid ..... 補助線
print -deps fig.eps ..... EPS ファイルの生成
```

とすると，図 **9.1** (a) に示す結果が得られ，EPS ファイルを LaTeX で取り込むと，図 **9.1** (b) となる．このとき，フォントの大きさがあまりにも小さ過ぎる，グラフの線が細すぎる，などの不満が生じるであろう．

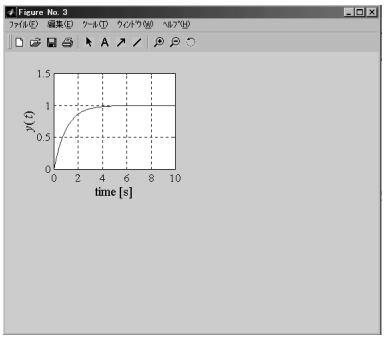
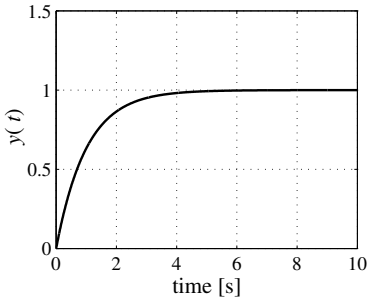
そこで，筆者は

```
subplot(2,2,1)
  ..... 描画の領域を縦 2，横 2 に分割し (4 分割)，1 番目の領域 (左上の領域) に描画
plot(t,y,'LineWidth',1); ..... グラフのプロット (線の太さ：1pt に指定)
set(gca,'fontsize',12,'fontname','times')
  ..... 目盛りのフォントサイズ：12pt，目盛りのフォント：times に指定
xlabel('time [s]','fontsize',14,'fontname','times')
  ..... 横軸のラベル (フォントサイズ：14pt，フォント：times に指定)
ylabel('{¥it y}({¥it t})','fontsize',14,'fontname','times')
```

(a) Figure Window　　(b) 生成された EPS ファイル

図 **9.1**　グラフをカスタマイズしない場合

(a) Figure Window　　(b) 生成された EPS ファイル

図 **9.2**　グラフをカスタマイズした場合

```
  ..... 縦軸のラベル （フォントサイズ：14pt，フォント：times に指定し，‘‘y’’ と ‘‘t’’ を斜体）

axis([0 10 0 1.5])
  .....  軸の範囲を指定（横軸の最小値 0，横軸の最大値 10，縦軸の最小値 0，縦軸の最大値 1.5）
set(gca,'XTick',[0 0.5 1 1.5]) ..................................... 横軸の目盛り
set(gca,'XTickLabel',[0 0.5 1 1.5]) ......................... 横軸の目盛りのラベル
set(gca,'YTick',[0 0.5 1 1.5]) ..................................... 縦軸の目盛り
set(gca,'YTickLabel',[0 0.5 1 1.5]) ......................... 縦軸の目盛りのラベル
grid ..................................................................... 補助線

print -deps fig.eps ..........................................  EPS ファイルの生成
```

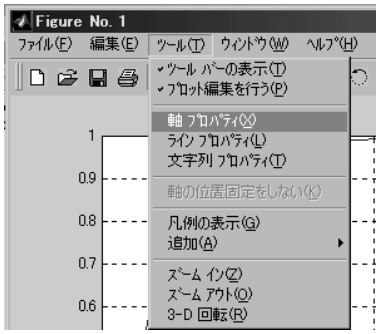
のようにカスタマイズを行っている．このとき，図 **9.2** (a) に示す結果が得ら

れ，EPS ファイルを LaTeX で取り込むと，図 **9.2** (b) となる．

9.2 Figure Window でカスタマイズする方法

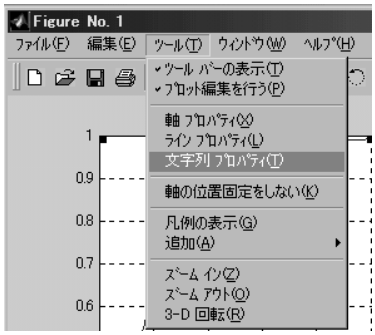
9.2.1 MATLAB Ver.5.3.x (リリース 11.x) の場合

MATLAB Ver.5.3.x (リリース 11.x) の場合，Figure Window でグラフをカスタマイズするには，まず，Figure Window の矢印ボタン をクリックする．つぎに，変更したい部分 (たとえば，目盛り，グラフの線，ラベル等) にマウスを持っていき，クリックした後，図 **9.3** のように Figure Window のメニューを選択する．このとき，図 **9.4** に示すウィンドウが現れる．



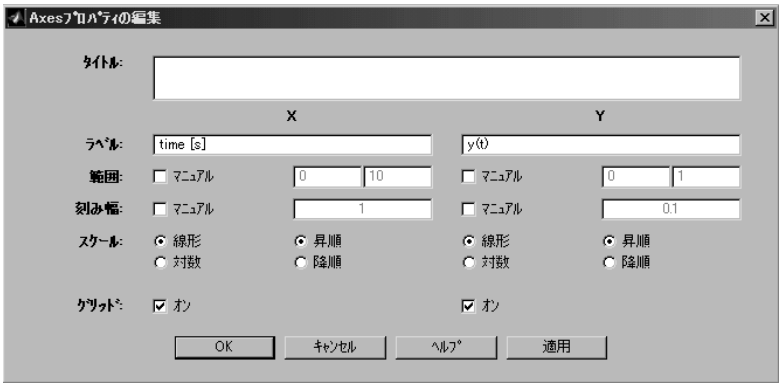
(a) “ツール / 軸プロパティ” を選択

(b) “ツール / ラインプロパティ” を選択



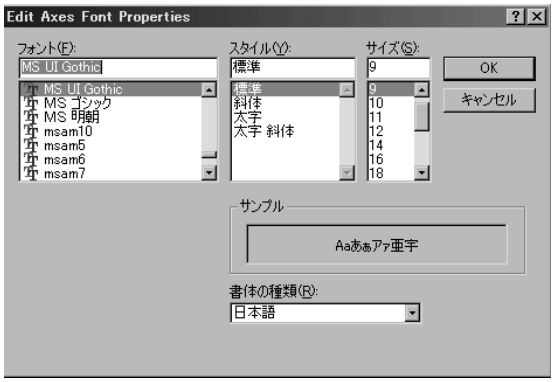
(c) “ツール / 文字列プロパティ” を選択

図 9.3 Figure Window でのカスタマイズ (MATLAB Ver.5.3.x (リリース 11.x))



(a) “ツール / 軸プロパティ” を選択し，目盛りをカスタマイズ

(b) “ツール / ラインプロパティ” を選択し，グラフの線をカスタマイズ



(c) “ツール / 文字列プロパティ” を選択し，フォントをカスタマイズ

図 9.4 Figure Window でのカスタマイズ (MATLAB Ver.5.3.x (リリース 11.x))

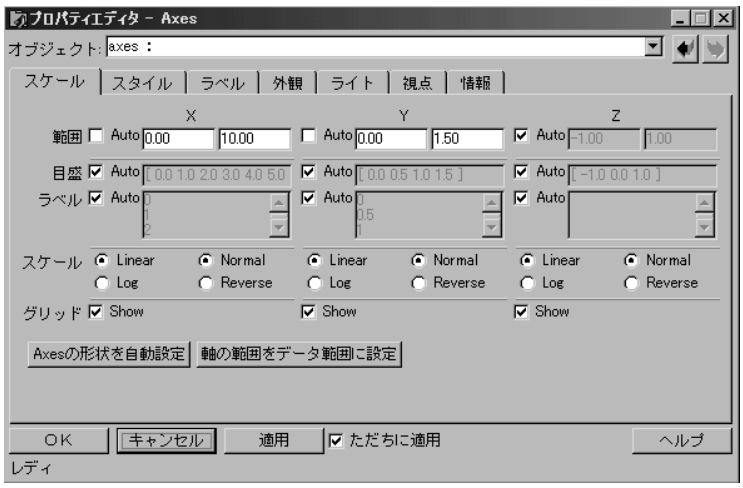
9.2.2 MATLAB Ver.6.0 (リリース 12) の場合

MATLAB Ver.6.0 (リリース 12) の場合，Figure Window のメニューで

- “編集 / Axes プロパティ”

を選択すれば (図 **9.5** (a))，目盛り，グラフの線，フォント等のカスタマイズを行うことができる (図 **9.5** (b)) .

(a) “編集 / Axes プロパティ” の選択



(b) プロパティエディタ — Axes

図 **9.5** Figure Window でのカスタマイズ (MATLAB Ver.6.0 (リリース 12))