$F(s) = \mathcal{L}\big[f(t)\big]$ を次式のように定義する．

ラプラス変換の定義

$$F(s) = \mathcal{L}\big[f(t)\big] := \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau \tag{2.2}$$

ここで，s は**ラプラス演算子**と呼ばれる複素数 $s = \sigma + j\omega$ である．ラプラス変換を利用すると，信号 $f(t)$ の時間微分や時間積分が簡単な表現となり，初期値がすべて零 $\big(f(0) = 0,\ \dot{f}(0) = 0,\ \cdots,\ d^{n-1}f(0)/dt^{n-1} = 0\big)$ のとき，

時間微分，時間積分のラプラス変換

時間微分：
$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) \tag{2.3}$$

時間積分：
$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}F(s) \tag{2.4}$$

となる．すなわち，**s は 1 回の時間微分，$1/s$ は 1 回の時間積分**を表す．

【解説】

まず，$f(t)$ の時間微分のラプラス変換を求めてみよう．部分積分の関係式により $\mathcal{L}\big[\dot{f}(t)\big]$ は

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\big[\dot{f}(t)\big] &= \int_0^\infty \frac{df(\tau)}{d\tau}e^{-s\tau}d\tau = \big[f(\tau)e^{-s\tau}\big]_0^\infty - \int_0^\infty f(\tau)\frac{de^{-s\tau}}{d\tau}d\tau \\ &= \big[f(\tau)e^{-s\tau}\big]_0^\infty + s\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau = -f(0) + sF(s)\end{aligned} \tag{2.5}$$

となる．同様に，$f(t)$ を n 回時間微分したときのラプラス変換は

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = -s^{n-1}f(0) - s^{n-2}\dot{f}(0) - \cdots - \frac{d^{n-1}f(0)}{dt^{n-1}} + s^n F(s) \tag{2.6}$$

となる．したがって，初期値が零 $\big(f(0) = 0,\ \dot{f}(0) = 0,\ \cdots,\ d^{n-1}f(0)/dt^{n-1} = 0\big)$ のとき，(2.6) 式は (2.3) 式となる．

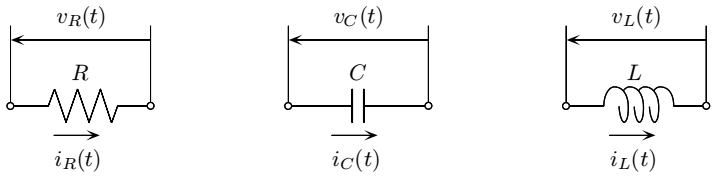
つぎに，$f(t)$ の時間積分 $g(t) = \displaystyle\int_0^t f(\tau)d\tau$ のラプラス変換 $G(s)$ を求める．$\dot{g}(t)$ のラプラス変換は

電気系の基本素子の関係式

抵抗　：　$v_R(t) = Ri_R(t)$　(2.15)

コンデンサ：　$v_C(t) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t i_C(\tau)d\tau$　(2.16)

コイル　：　$v_L(t) = L\dfrac{d}{dt}i_L(t)$　(2.17)



(a)　抵抗　(b)　コンデンサ　(c)　コイル

図 2.7　電気系の基本素子

ただし，R [Ω]：抵抗，C [F]：静電容量，L [H]：インダクタンス，$v_R(t)$，$v_C(t)$，$v_L(t)$ [V]：抵抗，コンデンサ，コイルの両端の電圧，$i_R(t)$，$i_C(t)$，$i_L(t)$ [A]：抵抗，コンデンサ，コイルに流れる電流である．

以上の関係式とキルヒホッフの法則を利用すれば，以下の例に示すように，電気系のモデルを得ることができる．

例 2.1　RL 回路

図 2.8 に示す RL 回路において，入力 $u(t)$ を入力電圧 $v_{in}(t)$，出力 $y(t)$ を電流 $i(t)$ としたモデルを求める．

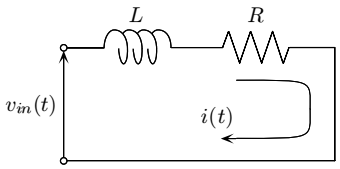


図 2.8　RL 回路

(a)　線形微分方程式　**図 2.8** より $u(t) = v_{in}(t)$，$y(t) = i(t)$ とすると，以下の微分方程式 (回路方程式) が得られる．

$$L\dot{y}(t) + Ry(t) = u(t) \tag{2.18}$$

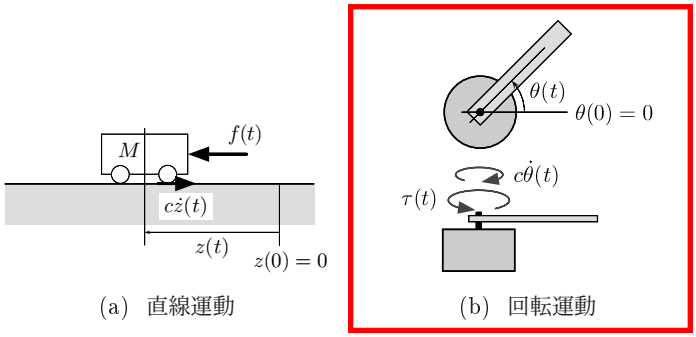
(b)　伝達関数表現　(2.18) 式の両辺をラプラス変換することにより，$u(s)$ から $y(s)$ への伝達関数 $P(s)$ が次式のように求まる．

また，物体に働く摩擦力 (トルク) は粘性摩擦とクーロン摩擦の和で表すことが多いが，クーロン摩擦を無視すれば，**図 2.13** に示すように，粘性摩擦による力 $f_r(t)$ (トルク $\tau_r(t)$) はダンパによる力 (トルク) と同様，c を粘性摩擦係数とすると次式のようになる．

粘性摩擦により生じる力・トルク

直線運動：　$f_r(t) = -c\dot{z}(t)$　(2.34)

回転運動：　$\tau_r(t) = -c\dot{\theta}(t)$　(2.35)



(a)　直線運動　　(b)　回転運動

図 2.13　粘性摩擦により生じる力 (トルク)

例 2.3　台車

(a)　線形微分方程式　　**図 2.13 (a)** に示す台車の運動方程式は，

$$M\ddot{z}(t) = f(t) - c\dot{z}(t) \tag{2.36}$$

となる．したがって，台車の入力を $u(t) = f(t)$，出力を $y(t) = z(t)$ とすると，以下の線形微分方程式が得られる．

$$M\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) = u(t) \tag{2.37}$$

(b)　伝達関数表現　　(2.37) 式の両辺をラプラス変換すると，次式のように台車の伝達関数 $P(s)$ が求まる．

$$P(s) = \frac{1}{Ms^2 + cs} \tag{2.38}$$

問題 2.4　　**図 2.13 (b)** に示す水平駆動アームにおいて，$u(t) = \tau(t)$，$y(t) =$

便利な係数の求め方（p_i が互いに異なる場合）

$$k_i = (s - p_i)y(s)\big|_{s=p_i} \tag{3.30}$$

【解説】

簡単のため，

$$y(s) = \frac{b_1 s + b_0}{(s-p_1)(s-p_2)} = \frac{k_1}{s-p_1} + \frac{k_2}{s-p_2} \tag{3.31}$$

の場合を考えてみよう．(3.31) 式に $s - p_1$ をかけると，

$$(s-p_1)y(s) = k_1 + \frac{k_2(s-p_1)}{s-p_2} \tag{3.32}$$

となる．したがって，(3.32) 式において $s = p_1$ とすれば，

$$k_1 = (s-p_1)y(s)\big|_{s=p_i} \tag{3.33}$$

のように k_1 が求まる．k_2 も同様にして求めることができる．

例 3.10　例 3.8 のステップ応答における部分分数分解

例 3.8 の部分分数分解における係数パラメータを (3.30) 式を利用して求めると，以下のようになる．

$$k_1 = sy(s)\big|_{s=0} = \frac{1}{s+1}\bigg|_{s=0} = 1,\ k_2 = (s+1)y(s)\big|_{s=-1} = \frac{1}{s}\bigg|_{s=-1} = -1$$

(b)　p_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ に重根を含む場合　簡単のため重根は $p_1 = p_2 = \cdots = p_\ell$ のみであるとすると，(3.27) 式は

$$\begin{aligned} y(s) = {} & \frac{k_{1\ell}}{(s-p_1)^\ell} + \cdots + \frac{k_{12}}{(s-p_1)^2} + \frac{k_{11}}{s-p_1} \\ & + \frac{k_{\ell+1}}{s-p_{\ell+1}} + \frac{k_{\ell+2}}{s-p_{\ell+2}} + \cdots + \frac{k_n}{s-p_n} \end{aligned} \tag{3.34}$$

のように部分分数分解される．このとき，$y(s)$ の逆ラプラス変換は

$$\begin{aligned} y(t) = \mathcal{L}^{-1}[y(s)] = {} & \left(\frac{1}{\ell!}k_{1\ell}t^\ell + \cdots + k_{12}t + k_{11}\right)e^{p_1 t} \\ & + k_{\ell+1}e^{p_{\ell+1}t} + k_{\ell+2}e^{p_{\ell+2}t} + \cdots + k_n e^{p_n t} \end{aligned} \tag{3.35}$$

となる．k_i は恒等式により求まるが，計算が面倒であるため，以下の結果を用いることが多い．

便利な係数の求め方（p_i に重根を含む場合）

$$\begin{cases} k_{1i} = \dfrac{1}{(\ell-i)!}\dfrac{d^{\ell-i}\{(s-p_1)^{\ell}y(s)\}}{ds^{\ell-i}}\Big|_{s=p_i} & (i=1,\,2,\,\cdots,\,\ell) \\ k_j = (s-p_j)y(s)\big|_{s=p_j} & (j=\ell+1,\,\ell+2,\,\cdots,\,n) \end{cases} \tag{3.36}$$

【解説】

簡単のため，

$$y(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{(s-p_1)^2(s-p_3)} = \frac{k_{12}}{(s-p_1)^2} + \frac{k_{11}}{s-p_1} + \frac{k_3}{s-p_3} \tag{3.37}$$

の場合を考えてみよう．(3.37) 式に $(s-p_1)^2$ をかけると，

$$(s-p_1)^2 y(s) = k_{12} + k_{11}(s-p_1) + \frac{k_3(s-p_1)^2}{s-p_3} \tag{3.38}$$

であるから，(3.38) 式において $s=p_1$ とすれば，

$$k_{12} = (s-p_1)^2 y(s)\big|_{s=p_1} \tag{3.39}$$

のように k_{12} が求まる．また，(3.38) 式の両辺を s で微分すると，

$$\frac{d\{(s-p_1)^2 y(s)\}}{ds} = k_{11} + \frac{k_3\{2(s-p_1)(s-p_3) - (s-p_1)^2\}}{(s-p_3)^2} \tag{3.40}$$

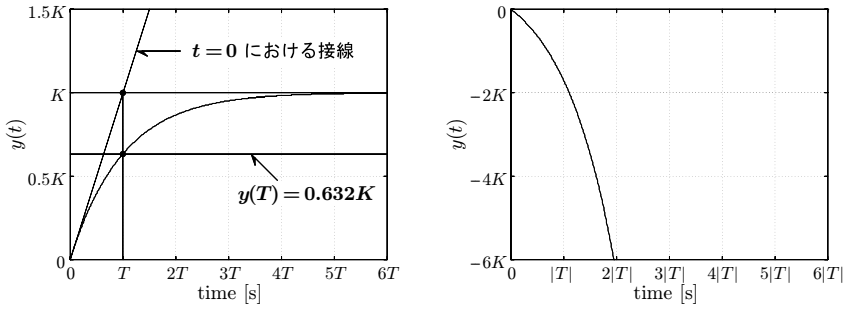
であるから，(3.40) 式において $s=p_1$ とすれば，

$$k_{11} = \frac{d\{(s-p_1)^2 y(s)\}}{ds}\Big|_{s=p_1} \tag{3.41}$$

のように k_{11} が求まる．k_3 に関しては p_i が異なる場合と同様の手順で求めることができるので省略する．

例 3.11　例 3.9 のインパルス応答における部分分数分解

例 3.9 の部分分数分解における係数パラメータを (3.36) 式を利用して求めると，以下のようになる．



(a)　$T > 0$　　(b)　$T < 0$

図 3.10　1 次遅れ系のステップ応答

以上より，1 次遅れ系の過渡特性について以下のことがいえる．

1 次遅れ系の過渡特性

- 1 次遅れ系の安定性は時定数 T により決まり，$T > 0$ のとき安定，$T < 0$ のとき不安定となる．また，$T > 0$ のときのステップ応答は**振動がなく，またオーバーシュートも生じない**．
- 1 次遅れ系のステップ応答の速応性は時定数 T の大きさで決まる．**$T > 0$ が小さいほど速応性が向上**し，**$t = T$ のときステップ応答 $y(t)$ が定常値 $y_\infty = K$ の 63.2 %** になる．

問題 3.6　　1 次遅れ系のインパルス応答が次式となることを確かめよ．

$$y(t) = \frac{K}{T} e^{-t/T} \ (t \geq 0) \tag{3.52}$$

また，インパルス応答の概略図を描け．

問題 3.7　　**図 3.11** の RL 回路においてスイッチ S を ON にしたときの過渡現象を解析する以下の問に答えよ．

(1)　入力 $u(t)$ を電圧 $e(t)$，出力 $y(t)$ を電流 $i(t)$ としたとき，RL 回路の時定数 T を求めよ．

(2)　スイッチ S を ON にした後の $i(t)$ および定常電流 i_∞ を求めよ．

(3)　R を大きくするにしたがって，立ち上がり時間は長くなるか短くなるか

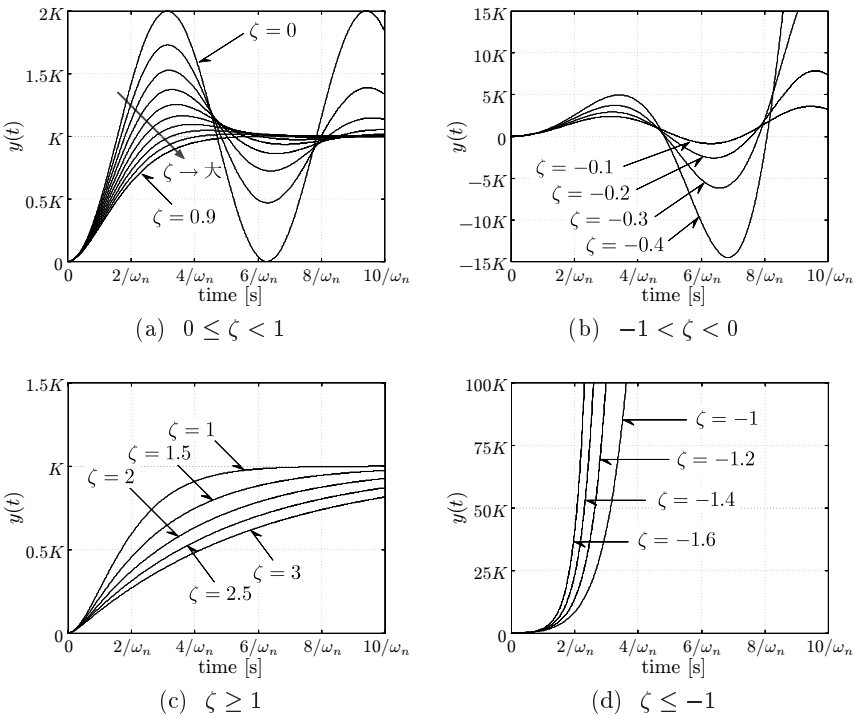


図 3.14　2 次遅れ系のステップ応答

$$
\begin{aligned}
y(t) &= K\mathcal{L}^{-1}\left[\left\{\frac{1}{s} - \frac{\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2} - \frac{1}{s+\zeta\omega_n}\right\}\right] \\
&= K\left\{1 - e^{-\zeta\omega_n t}(\zeta\omega_n t + 1)\right\} \qquad (3.57)
\end{aligned}
$$

となる．(3.57) 式より $\zeta = 1$ のときは振動せずに $y_\infty = K$ に収束し (**図 3.14** (c))，$\zeta = -1$ のときは振動せずに発散 (**図 3.14** (d)) することがわかる．

(iii)　$|\zeta| > 1$ の場合

$P(s)$ の極 (2 つの異なる実数) を $p_1 = -(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$，$p_2 = -(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$ とおくと，ステップ応答は $t \geq 0$ で

$$y(t) = K\mathcal{L}^{-1}\left[\left\{\frac{1}{s} + \frac{1}{p_1 - p_2}\left(\frac{p_2}{s - p_1} - \frac{p_1}{s - p_2}\right)\right\}\right]$$
$$= K\left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{2\beta}\left\{\left(\zeta + \beta\right)e^{\beta\omega_n t} - \left(\zeta - \beta\right)e^{-\beta\omega_n t}\right\}\right] \quad (3.58)$$
$$\beta = \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

となる．$|\zeta| > \beta > 0$ であるから，(3.58) 式より $\zeta > 1$ のときは振動せずに指数関数的に $y_\infty = K$ に収束し (**図 3.14** (c))，$\zeta < -1$ のときは振動せずに指数関数的に発散する (**図 3.14** (d)) ことがわかる．

つぎに，2 次遅れ系のステップ応答の過渡特性を考察してみよう．

(a) 行き過ぎ時間 T_p　(3.54)，(3.57)，(3.58) 式からわかるように，オーバーシュートを生じるのは $0 < \zeta < 1$ のときである．$0 < \zeta < 1$ のとき，(3.54) 式で示したように，ステップ応答は

$$y(t) = K\left\{1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\sin\omega_d t + \cos\omega_d t\right)\right\}$$

であるから，$y(t)$ の時間微分は

$$\dot{y}(t) = \frac{K\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_d t \quad (3.59)$$

となる．したがって，行き過ぎ時間 T_p は $\omega_d t = \pi$ となるような時間 ($\sin\omega_d t = 0$ となる最初の時間 $t > 0$) であり，行き過ぎ時間 T_p は次式となる．

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (3.60)$$

(b) オーバーシュート A_{max}　ステップ応答の最大ピーク値 y_{max} は

$$y_{max} = y(T_p) = K\left(1 + e^{-\zeta\omega_n T_p}\right) \quad (3.61)$$

であり，定常値は $y_\infty = K$ であるから，オーバシュート A_{max} は次式となる．

$$A_{max} = y_{max} - y_\infty = Ke^{-\zeta\omega_n T_p} = K\exp\left(-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \quad (3.62)$$

(c)　減衰率 λ　(3.59) 式より i 番目のピーク値 y_i は

$$\omega_d t_i = (2i-1)\pi \quad (i = 1, 2, \cdots)$$

を満足する時間 t_i における $y(t)$ である．したがって，

$$y_i = y(t_i) = K\left(1 + e^{-\zeta\omega_n t_i}\right) \quad (3.63)$$

であるから，i 番目の行き過ぎ量を A_i は

$$A_i = y_i - y_\infty = Ke^{-\zeta\omega_n t_i} \quad (3.64)$$

となり，減衰率 $\lambda = A_{i+1}/A_i$ は一定値

$$\lambda = \frac{A_{i+1}}{A_i} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t_{i+1}}}{e^{-\zeta\omega_n t_i}} = \exp\left(-\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \quad (3.65)$$

であることがわかる．また，対数減衰率 $\lambda' = \log_e\lambda$ は次式となる．

$$\lambda' = -\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (3.66)$$

以上のことから 2 次遅れ系の過渡特性については以下のことがいえる．

2 次遅れ系の過渡特性

(1)　減衰係数 ζ：　安定度 (減衰性) に関するパラメータであり，以下のような特徴を持つ．

- $\zeta < 0$ のとき発散する (**不安定**)．
- $\zeta = 0$ のとき，発散も減衰もしない持続振動となる (**安定限界**)．
- $0 < \zeta < 1$ のとき，オーバーシュート A_{max}，減衰率 λ は減衰係数 $0 < \zeta < 1$ のみに依存した

$$A_{max} = K\exp\left(-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right),\ \lambda = \exp\left(-\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

となり，振動しながら指数関数的に定常値 $y_\infty = K$ に収束する

において，入力を

$$u(t) = A\sin\omega t \quad (A > 0,\, \omega > 0)$$

としたとき，出力 $y(t)$ がどのようになるかを調べてみよう．$u(t) = A\sin\omega t$ のラプラス変換は $u(s) = A\omega/(s^2+\omega^2)$ であるから，$y(t)$ のラプラス変換は

$$y(s) = P(s)u(s) = \frac{1}{s+1}\frac{A\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+j\omega} + \frac{k_3}{s-j\omega} \tag{6.2}$$
$$k_1 = \frac{A\omega}{1+\omega^2},\ k_2 = \frac{A(j-\omega)}{2(1+\omega^2)},\ k_3 = -\frac{A(j+\omega)}{2(1+\omega^2)}$$

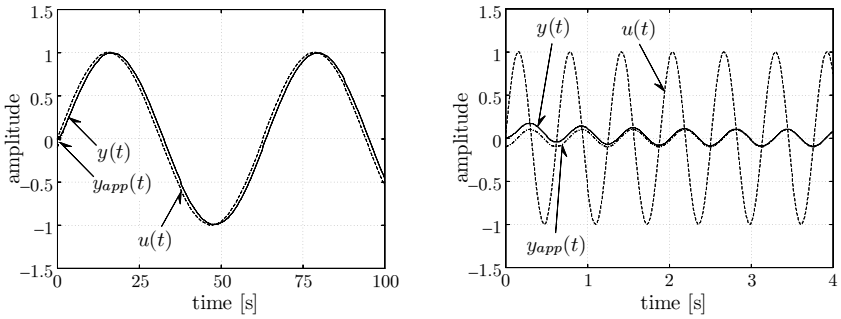
のように部分分数分解できる．したがって，$y(t)$ が以下のように求まる．

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[y(s)] = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-j\omega t} + k_3 e^{j\omega t} \\ &= \frac{A\omega}{1+\omega^2}e^{-t} + \frac{A}{1+\omega^2}(\sin\omega t - \omega\cos\omega t) \quad (t \geq 0) \end{aligned} \tag{6.3}$$

(6.3) 式より十分時間が経過すると $e^{-t} \cong 0$ であるから，出力 $y(t)$ は入力 $u(t) = A\sin\omega t$ と同じ周波数の正弦波

$$\begin{aligned} y(t) &\cong \frac{A}{1+\omega^2}(\sin\omega t - \omega\cos\omega t) \\ &= B(\omega)\sin(\omega t + G_p(\omega)) \ (= y_{app}(t)) \end{aligned} \tag{6.4}$$
$$B(\omega) = \frac{A}{\sqrt{1+\omega^2}},\ G_p(\omega) = \tan^{-1}(-\omega) = -\tan^{-1}\omega$$

で近似できる．



(a)　$u(t) = \sin 0.1t$　　(b)　$u(t) = \sin 10t$

図 6.2　$P(s) = 1/(s+1)$ の周波数応答

図 6.2 に $A = 1$，$\omega = 0.1,\ 10$ とした場合の入出力の波形 $u(t)$，$y(t)$ および $y(t)$ の近似波形 $y_{app}(t)$ を示す．**図 6.2** からわかるように，低周波数では入出力の振幅，位相差はほとんど同じであるが，高周波数では入力 $u(t)$ と比べて出力 $y(t)$ の振幅は小さくなり，位相も遅れている．したがって，動的システムの特性は入出

$$
\begin{aligned}
P(j\omega) &= \frac{N_1(j\omega)N_2(j\omega)\cdots N_m(j\omega)}{D_1(j\omega)D_2(j\omega)\cdots D_n(j\omega)} \\
&= \frac{|N_1(j\omega)|e^{j\angle N_1(j\omega)}|N_2(j\omega)|e^{j\angle N_2(j\omega)}\cdots|N_m(j\omega)|e^{j\angle N_m(j\omega)}}{|D_1(j\omega)|e^{j\angle D_1(j\omega)}|D_2(j\omega)|e^{j\angle D_2(j\omega)}\cdots|D_n(j\omega)|e^{j\angle D_n(j\omega)}} \\
&= \frac{|N_1(j\omega)||N_2(j\omega)|\cdots|N_m(j\omega)|}{|D_1(j\omega)||D_2(j\omega)|\cdots|D_n(j\omega)|} \\
&\quad \times\exp\left\{ j\left(\sum_{i=1}^{m}\angle N_i(j\omega) - \sum_{i=1}^{n}\angle D_i(j\omega) \right) \right\} \qquad (6.20)
\end{aligned}
$$

となる．したがって，(6.19) 式のゲイン $|P(j\omega)|$，位相差 $\angle P(j\omega)$ は次式にしたがって求めることができる．

ゲインと位相差の便利な求め方

ゲイン：
$$|P(j\omega)| = \frac{|N_1(j\omega)||N_2(j\omega)|\cdots|N_m(j\omega)|}{|D_1(j\omega)||D_2(j\omega)|\cdots|D_n(j\omega)|} \qquad (6.21)$$

位相差：
$$\angle P(j\omega) = \sum_{i=1}^{m}\angle N_i(j\omega) - \sum_{i=1}^{n}\angle D_i(j\omega) \qquad (6.22)$$

例 6.4　ゲインと位相差の便利な求め方 1

例 6.3 で示した伝達関数 $P(s) = 1/(s+1)(s+2)$ は

$$P(s) = \frac{1}{D_1(s)D_2(s)},\ D_1(s) = s+1,\ D_2(s) = s+2$$

とかける．ここで，

$$|D_1(j\omega)| = \sqrt{1+\omega^2},\ \angle D_1(j\omega) = \tan^{-1}\omega$$
$$|D_2(j\omega)| = \sqrt{1+4\omega^2},\ \angle D_2(j\omega) = \tan^{-1}\frac{1}{2}\omega$$

であるから，$P(s)$ のゲイン，位相差は以下のようになる．

$$|P(j\omega)| = \frac{1}{|D_1(j\omega)||D_2(j\omega)|} = \frac{1}{\sqrt{(1+\omega^2)(1+4\omega^2)}} \qquad (6.23)$$

$$\angle P(j\omega) = -\big(\angle D_1(j\omega) + \angle D_2(j\omega)\big) = -\left(\tan^{-1}\omega + \tan^{-1}\frac{1}{2}\omega\right) \qquad (6.24)$$

なお，(6.23) 式が (6.15) 式と一致していることは明らかである．また，

$$\phi_1 = \tan^{-1}\omega,\ \phi_2 = \tan^{-1}\frac{1}{2}\omega$$

とおき，加法定理を利用すると，

- **共振ピーク**：共振ピーク M_p が $|P(0)| = 1$ より大きいとき，ピーク周波数付近 ω_p の入力 $u(t)$ が加わると，出力 $y(t)$ の振幅は入力 $u(t)$ の振幅よりも大きくなる．このような現象を**共振**という．したがって，共振ピークが大きければ出力の振れが大きくなるため，**共振ピークは減衰性（安定度）の指標**である．

6.3　基本要素の周波数特性

6.3.1　1 次遅れ要素

1 次遅れ要素[注 5]

$$P(s) = \frac{1}{1+Ts} \tag{6.27}$$

のゲイン $|P(j\omega)|$，位相差 $\angle P(j\omega)$ は以下のようになる．

$$|P(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}},\ \angle P(j\omega) = -\tan^{-1}\omega T \tag{6.28}$$

(6.28) 式より

$\omega T \ll 1$ のとき
$$\begin{cases} 20\log_{10}|P(j\omega)| \cong 20\log_{10}1 = 0\ [\mathrm{dB}] \\ \angle P(j\omega) \cong -\tan^{-1}0 = 0\ [\mathrm{deg}] \end{cases}$$

$\omega T = 1$ のとき
$$\begin{cases} 20\log_{10}|P(j\omega)| = 20\log_{10}\dfrac{1}{\sqrt{2}} \cong -3.01\ [\mathrm{dB}] \\ \angle P(j\omega) = -\tan^{-1}1 = -45\ [\mathrm{deg}] \end{cases}$$

$\omega T \gg 1$ のとき
$$\begin{cases} 20\log_{10}|P(j\omega)| \cong 20\log_{10}\dfrac{1}{\omega T} = -20\log_{10}\omega T\ [\mathrm{dB}] \\ \angle P(j\omega) \cong -\tan^{-1}\infty = -90\ [\mathrm{deg}] \end{cases}$$

であるから，ボード線図は**図 6.7**，**6.8**，ベクトル軌跡は **図 6.9** のようになる．ボード線図は $\omega = 1/T$ を境にして 0 [dB] と -20 [dB/dec] で近似でき，位相特性は $0 < \omega \leq 1/5T$ で 0 [deg]，$\omega \geq 5/T$ で -90 [deg]，この間を直線で近似できる．このような近似を**折れ線近似**と呼ぶ．また，ベクトル軌跡は中心を

[注 5] 1 次遅れ系となるシステムの例は **2.6.2 節** (20 ページ) に示してある．

ンド幅 ω_b は大きくなるから，速応性がよくなる．
- ゲイン $|P(j\omega)|$ が 1 を越えることはないため共振は生じない．したがって，安定度 (減衰性) は時定数 T に依存しない．

このように，1 次遅れ要素は高周波数の信号を除去して低周波数の信号のみを通す (すなわち，低周波数 $\omega \ll 1/T$ ではゲインが 0 [dB] で位相差は 0 [rad]，高周波数 $\omega \gg 1/T$ ではゲインが負側に大きい) ため，ノイズ (観測雑音) の除去などに用いる 1 次の**ローパスフィルタ (低域通過フィルタ)** として用いられることが多い．また，周波数 $\omega_c = 1/T$ を**カットオフ周波数 (遮断周波数)** と呼ぶ．**図 6.10** にノイズを除去する様子を示す．

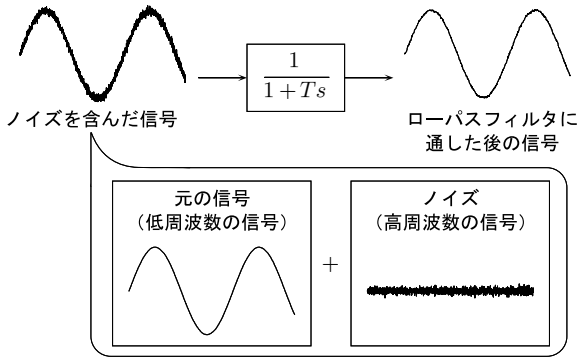


図 6.10　ローパスフィルタ

問題 6.5　1 次遅れ要素 (6.27) 式のナイキスト軌跡が中心 $(1/2,\ 0)$，半径 $1/2$ の円となっていることを示せ．

問題 6.6　$P(s) = 1/(1 + 10s)$ のベクトル軌跡，ボード線図の概略を描け．

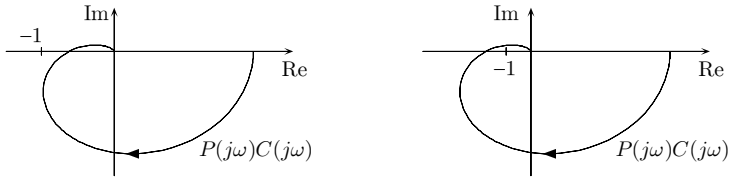
6.3.2　2 次遅れ要素

2 次遅れ要素[注 6]

[注 6] 2 次遅れ系となるシステムの例は **2.6.3 節** (21 ページ) に示してある．

簡略化されたナイキストの安定判別法 ($P(s)C(s)$ が安定な場合)

開ループ伝達関数 $P(s)C(s)$ が安定である場合，$P(s)C(s)$ のベクトル軌跡が点 $(-1,\,0)$ を常に左側に見るのであれば閉ループシステムは安定であり，右側にみるような場合があれば閉ループシステムは不安定である．



(a)　閉ループシステムが安定　　(b)　閉ループシステムが不安定

図 7.5　安定な $P(s)C(s)$ のベクトル軌跡と閉ループシステムの安定判別

例 7.2　簡略化されたナイキストの安定判別法の利用例 1

安定な 1 次遅れ要素の制御対象

$$P(s) = \frac{1}{1+Ts},\ T > 0$$

と P コントローラ

$$C(s) = k_P,\ k_P > 0$$

とで構成される**図 7.1** のフィードバック制御系を考える．

開ループ伝達関数 $L(s) := P(s)C(s) = k_P/(1+Ts)$ のゲイン $|L(j\omega)|$，位相 $\angle L(j\omega)$ は

$$|L(j\omega)| = \frac{k_P}{\sqrt{1+(\omega T)^2}},\ \angle L(j\omega) = -\tan^{-1}\omega T$$

であるから，

$\omega = 0$ のとき　　$|L(j\omega)| = k_P,\ \angle L(j\omega) = 0$ [deg]
$\omega = \infty$ のとき　　$|L(j\omega)| = 0,\ \angle L(j\omega) = -90$ [deg]

となる．また，周波数伝達関数 $L(j\omega)$ は

$$L(j\omega) = \frac{k_P}{1+j\omega T} = \frac{k_P(1-j\omega T)}{1+(\omega T)^2}$$

であり，$L(j\omega)$ の虚数部が $\mathrm{Im}\big[L(j\omega)\big] = 0$ となるような周波数は $\omega = 0$ のみである．したがって，$P(j\omega)C(j\omega)$ のベクトル軌跡は**図 7.6** のようになり，$k_P > 0$ がどのような値でも $P(j\omega)C(j\omega)$ のベクトル軌跡は点 $(-1,\,0)$ を常に左側に見るので，閉ループシステムは $k_P > 0$ によらず常に安定となる．

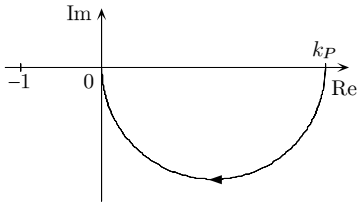


図 7.6　**例 7.2** における $P(s)C(s)$ のベクトル軌跡

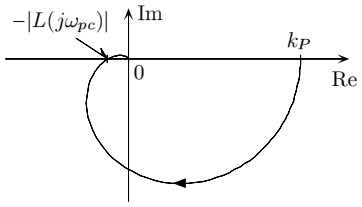


図 7.7　**例 7.3** における $P(s)C(s)$ のベクトル軌跡

例 7.3　簡略化されたナイキストの安定判別法の利用例 2

制御対象

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)^3} \tag{7.11}$$

と P コントローラ

$$C(s) = k_P,\ k_P > 0 \tag{7.12}$$

とで構成される**図 7.1** のフィードバック制御系が安定となるような k_P の範囲を求めることを考える．

$k_P > 0$ のときの開ループ伝達関数 $L(s) := P(s)C(s)$ のゲイン $|L(j\omega)|$，位相 $\angle L(j\omega)$ は

$$|L(j\omega)| = \frac{k_P}{|1+j\omega|^3} = \frac{k_P}{(1+\omega^2)^{3/2}},\ \angle L(j\omega) = -3\tan^{-1}\omega \tag{7.13}$$

であるから，

$\omega = 0$ のとき　$|L(j\omega)| = k_P,\ \angle L(j\omega) = 0$ [deg]
$\omega = \infty$ のとき　$|L(j\omega)| = 0,\ \angle L(j\omega) = -270$ [deg]

となる．また，周波数伝達関数 $L(j\omega)$ は

$$L(j\omega) = \frac{k_P}{D(j\omega)},\ D(j\omega) = (1-3\omega^2) + j\omega(3-\omega^2)$$

であるから，$D(j\omega)$ の虚数部が $\mathrm{Im}\big[D(j\omega)\big] = 0$ となるような周波数 $0 < \omega < \infty$ は $\omega = \sqrt{3}$ である．したがって，$\angle L(j\omega) = -180$ [deg] となるような周波数 $\omega = \omega_{pc}$ は $\omega_{pc} = \sqrt{3}$ である．**図 7.1** の閉ループシステムが安定であるためには，$\omega = \omega_{pc}$ におけるゲインが 1 より小さくなければならないから，

$$|L(j\omega_{pc})| = \frac{k_P}{(1+\omega_{pc}^2)^{3/2}} = \frac{k_P}{8} < 1 \tag{7.14}$$

という安定化条件が得られる．よって，$0 < k_P < 8$ であれば**図 7.1** の閉ループシステムは安定である．なお，このシステムは $k_P = 8$ のときが安定限界である．

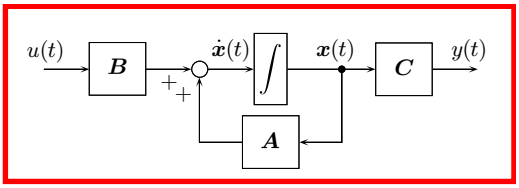


図 8.1　$D = 0$ とした状態空間表現のブロック線図

となる[注2]．ただし，$\boldsymbol{A}$：$n \times n$ 行列，$\boldsymbol{B}$：$n \times 1$ ベクトル，$\boldsymbol{C}$：$1 \times n$ ベクトル，D：スカラーである．このように，操作量 $u(t)$，制御量 $y(t)$ が共にスカラーであるようなシステムを **1 入出力系** (1 入力 1 出力系) と呼ぶ[注3]．また，(2.1) 式において $n > m$ (真にプロパー) の場合は $D = 0$ であり，このときの状態空間表現をブロック線図で表すと**図 8.1** のようになる．

例 8.1　垂直駆動アームのモデル：状態空間表現

例 2.4 で示したように，垂直駆動アームの運動方程式 (2.39) 式を $\theta(t) = 0$ 近傍で線形化すると，

$$J\ddot{\theta}(t) = -c\dot{\theta}(t) - M\ell g\theta(t) + \tau(t) \tag{8.3}$$

となる．ここで，状態変数 $\boldsymbol{x}(t)$，操作量 $u(t)$，制御量 $y(t)$ を

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix},\ u(t) = \tau(t),\ y(t) = \theta(t)$$

と選ぶと，

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{\theta}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \ddot{\theta}(t) = \frac{1}{J}\bigl(-c\dot{\theta}(t) - M\ell g\theta(t) + \tau(t)\bigr) \\ &= -\frac{M\ell g}{J}x_1(t) - \frac{c}{J}x_2(t) + \frac{1}{J}u(t) \\ y(t) &= \theta(t) = x_1(t) \end{aligned}$$

となる．したがって，(8.3) 式を状態空間表現で表すと係数行列は以下のようになる．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{M\ell g}{J} & -\dfrac{c}{J} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{J} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},\ D = 0 \tag{8.4}$$

[注2] MATLAB で状態空間表現を定義する方法は **8.5.1 節** (173 ページ) に示してある．

[注3] 操作量や制御量が複数個あるシステムを**多入力多出力系**と呼ぶ．状態空間表現は多入力多出力系を 1 入出力系と同様に扱えるという利点があるが，本書では 1 入出力系のみを扱う．

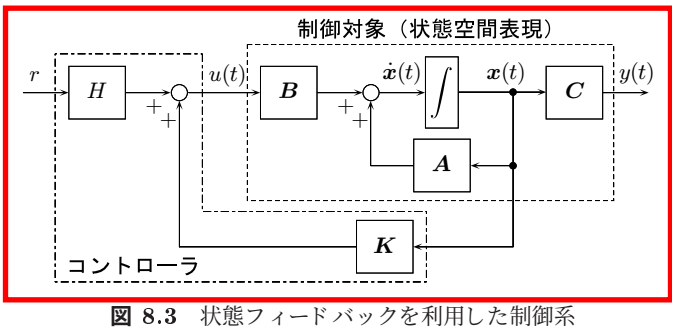


図 8.3　状態フィードバックを利用した制御系

値である．$D = 0$ である場合のブロック線図を**図 8.3** に示す．

例 8.5　垂直駆動アームの P–D 制御

5.3.2 節 で用いた垂直駆動アームの P–D コントローラは

$$u(t) = k_P e(t) - k_D \dot{y}(t),\ e(t) = r - y(t) \tag{8.28}$$

であった．ただし，$u(t) = \tau(t)$, $y(t) = \theta(t)$ である．ここで，状態変数 $x_1(t) = \theta(t)$, $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$ を用いて (8.28) 式の P–D コントローラを書き換えると，

$$\begin{aligned} u(t) &= k_P\big(r - x_1(t)\big) - k_D x_2(t) = \begin{bmatrix} -k_P & -k_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + k_P r \\ &= \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t) + Hr,\ \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} -k_P & -k_D \end{bmatrix},\ H = k_P \end{aligned} \tag{8.29}$$

のように (8.27) 式のコントローラの形式となる．

特に目標値が $r = 0$ であるとし，(8.27) 式において $H = 0$ とすると，

$$u(t) = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t) \tag{8.30}$$

となる．(8.30) 式は状態変数 $\boldsymbol{x}(t)$ をフィードバックしているので，**状態フィードバック**と呼ばれる．状態フィードバック (8.30) 式を用いたとき，(8.1) 式は

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \big(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\big)\boldsymbol{x}(t) \tag{8.31}$$

となるから，$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}$ の固有値の実部がすべて負となるようにフィードバックゲイン $\boldsymbol{K}$ が選ばれていると，$t \to \infty$ で $\boldsymbol{x}(t) \to 0$ となる．

以下の議論では，まず，コントローラが状態フィードバック (8.30) 式であるとし，状態フィードバックゲイン $\boldsymbol{K}$ の設計法を説明する．

例 8.8　垂直駆動アーム：最適レギュレータによる追従制御

例 2.4 の垂直駆動アームにおいて角度 $y(t) = x_1(t) = \theta(t)$ をその目標値 r に追従させるため，(8.45)，(8.46) 式の状態フィードバックを設計した．ただし，フィードバックゲイン $\boldsymbol{K}$ は**例 8.8** と同様，最適レギュレータにより設計した．

図 8.6 のシミュレーション結果からわかるように，角度 $y(t)$ は定常偏差なくその目標値 $r = 1$ に追従している．また，$q_1 > 0$ を大きくするにしたがって速応性が向上していることも確認できる．

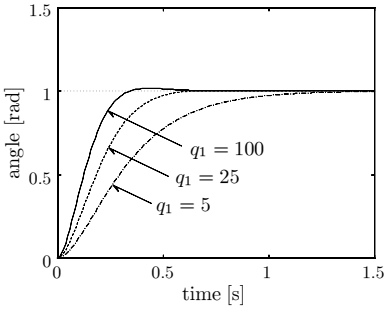


図 8.6　$\boldsymbol{Q} = \mathrm{diag}\{\, q_1,\ 0 \,\}$，$R = 1$ としたときの目標値応答 ($r = 1$，$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{0}$)

8.4.2　積分型追従制御

ここでは，**図 8.7** に示すように，積分器を含ませたコントローラ

$$u(t) = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t) + k_I w(t),\ w(t) := \int_0^t e(\tau)d\tau,\ e(t) = r - y(t) \qquad (8.47)$$

を用いることを考える．なお，$\boldsymbol{x}(t) = \left[\, y(t)\ \dot{y}(t) \,\right]^T$ であるとき，I–PD コントローラ (5.10) 式は (8.47) 式の形式となる．

まず，状態変数を $\boldsymbol{x}_e(t) = \left[\, \boldsymbol{x}(t)^T\ w(t) \,\right]^T$ とした拡大系

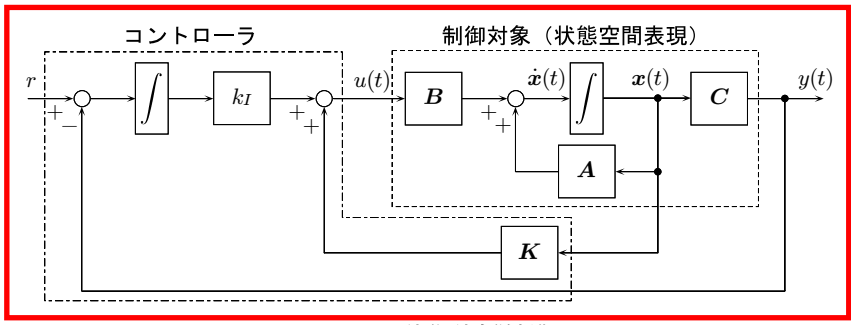


図 8.7　積分型追従制御

問題の解答

2 章の解答

問題 2.1 (1) $P(s)=\dfrac{1}{s+2}$，極：-2，零点：なし

(2) $P(s)=\dfrac{2s+1}{3s^2+2s+1}$，極：$\dfrac{-1\pm\sqrt{2}j}{3}$，零点：$-\dfrac{1}{2}$

問題 2.2 $P(s)=\dfrac{C}{CLs^2+RCs+1}$

問題 2.3 (1) $P(s)=\dfrac{Cs}{RCs+1}$ (2) $P(s)=\dfrac{1}{RCs+1}$

問題 2.4 $P(s)=\dfrac{1}{Js^2+cs}$ **問題 2.5** $P(s)=\dfrac{1}{Ms+c}$

問題 2.6 $P(s)=\dfrac{1}{Ms^2+(c_1+c_2)s+k}$

問題 2.7 $\mathcal{T}(t)=\dfrac{1}{2}M\dot{z}(t)^2$，$\mathcal{U}(t)=0$，$\mathcal{D}(t)=\dfrac{1}{2}c\dot{z}(t)^2$，$q(t)=z(t)$，$\nu(t)=f(t)$ であることを考慮すると，ラグランジュの運動方程式 (2.46) 式により微分方程式 (2.36) 式が導出される．

問題 2.8 $T=\dfrac{M}{c}$，$K=\dfrac{1}{c}$ **問題 2.9** $\omega_n=\dfrac{1}{\sqrt{CL}}$，$\zeta=\dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L}}$，$K=1$

問題 2.10 極：$-1.1043\pm0.5935j$，$0.4793\pm0.7521j$，零点：$-1.0000\pm1.4142j$

問題 2.11 $P(s)=\dfrac{10^7}{s^2+2900s+10^7}$，極：$-1450\pm2810.2j$

3 章の解答

問題 3.1 略

問題 3.2 (1) $\dfrac{3}{s}-\dfrac{1}{s+2}+\dfrac{2}{s-1}$ (2) $\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{2}{s^3}+\dfrac{6}{s^4}$ (3) $\dfrac{6}{s^2+9}+\dfrac{s}{s^2+4}$

(4) $\dfrac{1}{s}-\dfrac{s+3}{s^2+6s+10}$ (5) $\dfrac{6}{(s+2)^3}$ (6) $\dfrac{s+5}{s^2+4s+13}$

問題 3.3 (1) $f(t)=2+3e^{-2t}$ (2) $f(t)=\dfrac{t^2}{2}e^{-t}$

(3) $f(t)=\cos5t+\dfrac{1}{5}\sin5t$ (4) $f(t)=e^{-t}\left(2\cos2t+\dfrac{3}{2}\sin2t\right)$

問題 3.4 (1) $y(t)=\dfrac{3}{2}(1-e^{-2t})$ (2) $y(t)=2-3e^{-t}+e^{-2t}$

(3) $y(t)=2(1-te^{-t}-e^{-t})$ (4) $y(t)=1-e^{-t}\left(\cos2t+\dfrac{1}{2}\sin2t\right)$

問題 3.5 (1) $y_\infty=\dfrac{1}{2}$ (2) $y_\infty=2$

問題 3.6　インパルス応答は $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{K}{1+Ts}\right]$ により求まり，$y(t) = \dfrac{K}{T}e^{-t/T}$ となる．また，インパルス応答は初期値 $y(0) = \dfrac{K}{T}$ から指数関数的に零に近づく．

問題 3.7　(1)　$P(s) = \dfrac{1}{Ls+R}$ であるから，時定数は $T = \dfrac{L}{R}$ である．

(2)　$y(t) = K(1-e^{-t/T}) = \dfrac{1}{R}(1-e^{-Rt/L})$ $(t \geq 0)$，$y_\infty = \dfrac{1}{R}$

(3)　R を大きくすると時定数 T は小さくなるから，立ち上がり時間は短くなる．また，L を大きくすると時定数 T は大きくなるから，立ち上がり時間は長くなる．

問題 3.8　**問題 3.7** より $R = \dfrac{1}{y_\infty} = 50$ [Ω]，$L = RT = 0.2$ [H]

問題 3.9　$\zeta \geq 1$ より $R \geq 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

問題 3.10　(1)　$\omega_n = \sqrt{\dfrac{k}{M}}$，$\zeta = \dfrac{c}{2\sqrt{kM}}$，$K = \dfrac{1}{k}$

(2)　$K = y_\infty = 0.04$，$\omega_d = \dfrac{\pi}{T_p} \cong 6.28$，$\xi = -\dfrac{1}{T_p}\log_e \dfrac{A_{max}}{K} \cong 2.77$

(3)　$\omega_n = \sqrt{\omega_d^2 + \xi^2} \cong 6.87$，$\zeta = \dfrac{\xi}{\omega_n} \cong 0.404$ であるから，$k = \dfrac{1}{K} \cong 25$，$M = \dfrac{k}{\omega_n^2} \cong 0.530$，$c = 2\zeta\omega_n M \cong 2.94$ となる．

問題 3.11　(1)　安定　(2)　不安定　(3)　不安定　(4)　安定

問題 3.12 ～ 問題 3.15　略

4 章の解答

問題 4.1　略

問題 4.2　(1)　特性方程式の根は $s = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}j}{2}$ であるから安定

(2)　特性方程式の根は $s = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ であるから不安定

問題 4.3, 4.4　(1)　$k_P > -\dfrac{2}{5}$　(2)　$k_P > -\dfrac{2}{5}$，$0 < k_I < \dfrac{2}{5}(2+5k_P)$

問題 4.5　**解答図 4.5** に示す．

問題 4.6　(1)　$C(s) = 2 : e_\infty = \dfrac{1}{6}$，$C(s) = 5 : e_\infty = \dfrac{2}{27}$　(2)　$e_\infty = 0$

問題 4.7　(1)　$C(s) = 2 : y_\infty = \dfrac{5}{12}$，$C(s) = 5 : y_\infty = \dfrac{5}{27}$　(2)　$y_\infty = 0$

問題 4.8　$G_{yr}(s) = \dfrac{10s + 6.25}{s^3 + 2s^2 + 12s + 6.25}$，$G_{yd}(s) = \dfrac{5s}{s^3 + 2s^2 + 12s + 6.25}$，$G_{er}(s) = \dfrac{s^3 + 2s^2 + 2s}{s^3 + 2s^2 + 12s + 6.25}$，$G_{ed}(s) = \dfrac{-5s}{s^3 + 2s^2 + 12s + 6.25}$ であり，$G_{yr}(s)$，$G_{yd}(s)$ のステップ応答を**解答図 4.8** に示す．

問題 4.9　**解答図 4.8** を参照のこと．　**問題 4.10**　**解答図 4.5** を参照のこと．

6 章の解答

問題 6.1　(1)　$y(t)=\dfrac{1}{2}e^t-\dfrac{1}{2}(\cos t+\sin t)$ であるから，$t\to\infty$ とすると $e^t\to\infty$ となり $y(t)$ は発散する．したがって，$y(t)$ は (6.7) 式で近似できない．

問題 6.2　(1)　$|P(j\omega)|=\dfrac{1}{\sqrt{25+\omega^2}}$, $\angle P(j\omega)=-\tan^{-1}\dfrac{\omega}{5}$

(2)　$|P(j\omega)|=\dfrac{1}{\sqrt{25+\omega^2}}$, $\angle P(j\omega)=\tan^{-1}\dfrac{\omega}{5}$

(3)　$|P(j\omega)|=\dfrac{2}{\sqrt{4+\omega^4}}$, $\angle P(j\omega)=-\tan^{-1}\dfrac{2\omega}{2-\omega^2}$

(4)　$|P(j\omega)|=\dfrac{\omega}{2}\sqrt{\dfrac{1+\omega^2}{(9+\omega^2)(16+\omega^2)(25+\omega^2)}}$,

$\angle P(j\omega)=90+\tan^{-1}\omega-\tan^{-1}\dfrac{\omega}{3}-\tan^{-1}\dfrac{\omega}{4}-\tan^{-1}\dfrac{\omega}{5}$

(5)　$|P(j\omega)|=\dfrac{1}{(1+\omega^2)^5}$, $\angle P(j\omega)=-10\tan^{-1}\omega$

問題 6.3　$y(t)\cong\sin(t+\phi)$, $\phi=\tan^{-1}\dfrac{1}{2}-\tan^{-1}2$

問題 6.4　$\dfrac{B(\omega_1)}{A}=10$, $\dfrac{B(\omega_2)}{A}=1$, $\dfrac{B(\omega_3)}{A}=\dfrac{1}{10}$, $\dfrac{B(\omega_4)}{A}=\dfrac{1}{100}$

問題 6.5　$P(j\omega)=1/(1+j\omega T)=x+jy$ とおくと，$|P(j\omega)|=1/\sqrt{1+(\omega T)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$, $\angle P(j\omega)=-\tan^{-1}\omega T=\tan^{-1}y/x$ である．したがって，$y/x=-\omega T$ であるから，

$$\frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+(-y/x)^2}}=\sqrt{x^2+y^2}$$

により円の方程式 $(x-1/2)^2+y^2=(1/2)^2$ が得られる．

問題 6.6　**解答図 6.6** に示す．　**問題 6.7**　**解答図 6.7** に示す．

問題 6.8　(1)　$P(j\omega)=e^{-j\omega L}=\cos\omega L-j\sin\omega L$ より $|P(j\omega)|=1$, $\angle P(j\omega)=-\omega L$ であるから，**解答図 6.8** (a) に示すように，ベクトル軌跡は原点を中心とした半径 1 の円を時計回りに動く．

(2)　$|P(j\omega)|=1/\sqrt{1+(\omega T)^2}$, $\angle P(j\omega)=-(\omega L+\tan^{-1}\omega T)$ であるから，ベクトル軌跡は**解答図 6.8** (b) のようになる．

問題 6.9，問題 6.10　略

7 章の解答

問題 7.1　略

問題 7.2　(1)　$0<k_P<18$ (簡略化されたナイキストの安定判別法の場合：$\omega=\omega_{pc}=\sqrt{5}$ で $\mathrm{Im}\left[P(j\omega_{pc})C(j\omega_{pc})\right]=0$ となる)

(2)　$0<k_P<6$ (簡略化されたナイキストの安定判別法の場合：$\omega=\omega_{pc}=\sqrt{2}$ で $\mathrm{Im}\left[P(j\omega_{pc})C(j\omega_{pc})\right]=0$ となる)

問題 7.3　(1)
$$\begin{cases} \text{位相交差周波数：} \omega_{pc} = 10 \text{ [rad/s]} \\ \text{ゲイン余裕：} G_M = 80 - 20\log_{10}\dfrac{k_P}{4} \text{ [dB]} \end{cases}$$
$$\begin{cases} \text{ゲイン交差周波数：} \omega_{gc} = \sqrt{k_P^{1/2} - 10^2} \text{ [rad/s]} \ (k_P > 10^4) \\ \text{位相余裕：} P_M = 180 - 4\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{k_P^{1/2} - 10^2}}{10} \text{ [deg]} \ (k_P > 10^4) \end{cases}$$
(2)　$k_P = \dfrac{16}{9} \times 10^4$

問題 7.4　略

問題 7.5　たとえば，P コントローラ：$k_P = 8.5$ のとき $P_M = 49.98$ [deg]，PI コントローラ：$k_P = 5.8$，$T_I = 0.85$ のとき $P_M = 50.23$ [deg]，PID コントローラ：$k_P = 8.5$，$T_I = 0.85$，$T_D = 0.014$ のとき $P_M = 50.30$ [deg] となる．$S(s)$，$T(s)$ のボード線図，ステップ応答は省略する．

8 章の解答

問題 8.1　(1)　台車系の運動方程式は (2.36) 式であるから，たとえば状態変数を $\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} z(t) & \dot{z}(t) \end{bmatrix}^T$ と選べば，状態空間表現は
$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -c/M \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t)$$
となる．また，伝達関数表現に変換すると，$P(s) = 1/(Ms^2 + cs)$ である．

(2)　RCL 回路の回路方程式は (2.20)，(2.21) 式であるから，たとえば状態変数を $\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} \displaystyle\int_0^t i(\tau)d\tau & i(t) \end{bmatrix}^T$ と選べば，状態空間表現は
$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/CL & -R/L \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1/C & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t)$$
となる．また，伝達関数表現に変換すると，$P(s) = 1/(CLs^2 + RCs + 1)$ である．

問題 8.2　$e^{\boldsymbol{A}t} = e^{-2t}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} + e^{-3t}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$