粘弾性棒を伝ぱする縦波の減衰・分散特性について

機械工学科　玉男木隆之

1．緒言

高分子材料や複合材料は，軽量性や防振性の特徴を生かして広く利用されている．これらの材料に衝撃などの動的荷重が作用する場合は，粘弾性挙動を示すことが知られている．粘弾性材料の衝撃特性を評価する手法として，波動伝ぱ法，Split Hopkinson bar 法など，種々の方法が提案されているが，いずれも１次元初等理論に基づいて解析がなされている．棒の径や周波数成分などの実験条件によっては，測定波形に横方向慣性や幾何分散などの３次元的な影響が現れてくるため，本研究では，弾性棒を伝ぱする縦波に対して，Pochhammer-Chreeの厳密理論[1]を，粘弾性縦波に拡張し，減衰・分散の周波数特性に及ぼす３次元的影響を調べた．

2．三次元理論

弾性棒中の縦波に関するPochhammer-Chree理論を粘弾性棒に拡張する．等方弾性体の運動方程式は，

$$\rho\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2}=(\lambda+2\mu)\,\mathrm{grad}\,\varDelta-2\mu\,\mathrm{rot}\boldsymbol{\varOmega} \tag{1}$$

と表される．$\boldsymbol{u}$は変位ベクトル，$\varDelta$は体積ひずみ，$\boldsymbol{\varOmega}$は回転ベクトルを示し，$\varDelta=\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}$，$2\boldsymbol{\varOmega}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}$である．式(1)をフーリエ変換し，対応原理を用いれば，周波数領域での粘弾性体の運動方程式となり，円筒座標系(r,θ,z)で表示することにすれば次のようになる．

$$\left.\begin{aligned}
-\rho\omega^2\overline{u}_r&=(\lambda^*+2\mu^*)\frac{\partial\overline{\varDelta}}{\partial r}-2\mu^*\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\overline{\varOmega}_z}{\partial\theta}-\frac{\partial\overline{\varOmega}_\theta}{\partial z}\right)\\
-\rho\omega^2\overline{u}_\theta&=(\lambda^*+2\mu^*)\frac{1}{r}\frac{\partial\overline{\varDelta}}{\partial\theta}-2\mu^*\left(\frac{\partial\overline{\varOmega}_r}{\partial z}-\frac{\partial\overline{\varOmega}_z}{\partial r}\right)\\
-\rho\omega^2\overline{u}_z&=(\lambda^*+2\mu^*)\frac{\partial\overline{\varDelta}}{\partial z}-2\mu^*\left(\frac{\partial\overline{\varOmega}_\theta}{\partial r}+\frac{\overline{\varOmega}_\theta}{r}-\frac{1}{r}\frac{\partial\overline{\varOmega}_r}{\partial\theta}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

粘弾性丸棒を伝ぱする縦波において，軸対称を仮定し，棒の軸方向（z方向）に伝ぱする減衰・分散性の縦波を次のように表す．

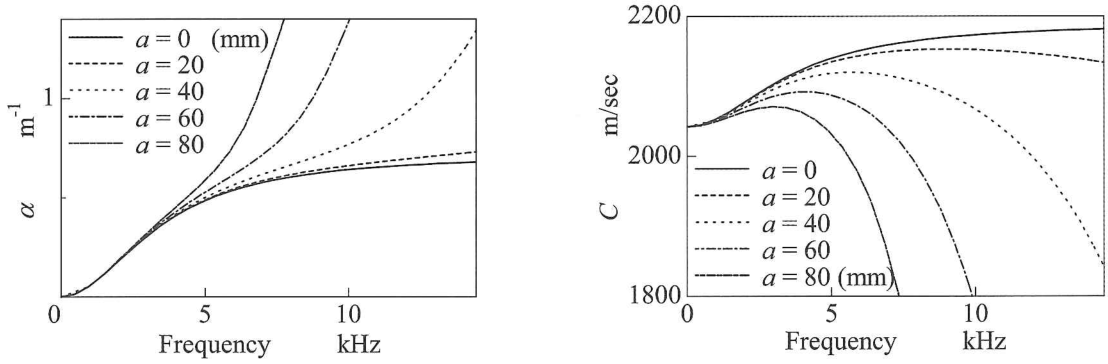
$$\left.\begin{aligned}
\overline{u}_r(r,z,\omega)&=\overline{U}_r(r,\omega)\cdot\exp\beta z\\
\overline{u}_z(r,z,\omega)&=\overline{U}_z(r,\omega)\cdot\exp\beta z
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

ただし，$\beta(\omega)=-\{\alpha(\omega)+ik(\omega)\}$

式(2)に代入し，ベッセルの微分方程式を解き，境界条件（円柱表面は自由表面と仮定）を用いれば，次の振動方程式を得る．

$$\begin{aligned}
&\frac{2p}{a}(q^2-\beta^2)J_1(pa)J_1(qa)+4\beta^2pqJ_0(qa)J_1(pa)\\
&\qquad-(q^2+\beta^2)^2J_0(pa)J_1(qa)=0
\end{aligned} \tag{4}$$

ここで，J_0およびJ_1は，それぞれ0次，1次のベッセル関数，β，p，qはいずれも複素数でωの関数である．式(4)を$\beta(\omega)$について解けば，減衰係数$\alpha(\omega)$および波数$k(\omega)$は以下のように求められる．



(a)　Attenuation Coefficient　　　　(b)　Phase Velocity

Fig.1　　Attenuation coefficient and phase velocity by Pochhammer-Chree theory

$$\left.\begin{aligned}\alpha(\omega) &= \mathrm{Re}[-\beta(\omega)] \\ k(\omega) &= \mathrm{Im}[-\beta(\omega)]\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

3．解析

式(5)において，減衰係数 $\alpha(\omega)$ は波動の減衰特性を表している．一方，波数 $k(\omega)$ は分散特性を表しているが，位相速度 $C(\omega)$ と

$$C(\omega) = \omega / k(\omega) \tag{6}$$

の関係があることから，位相速度 $C(\omega)$ で分散特性の評価を行う．

粘弾性丸棒の半径 a をパラメータとして，Pochhammer-Chreeの理論に基づいて式(5)から計算した減衰係数 α と位相速度 C を図1に示す． $a=0$ のときは初等理論の結果と一致する．径が大きくなるにつれて，また周波数が増加するにつれて，急激に初等理論（ $a=0$ ）との差が大きくなり，３次元的影響が顕著になることがわかる．一例として，図1(b)において初等理論の $a=0$ と $a=40$ mmを比較したとき，5 kHzの周波数で差異は約1%程度である．このときの位相速度は約 $C\cong 2100$ m/sであるから，波長は $\Lambda\cong 0.42$ m程度で，棒の半径との比は $a/\Lambda\cong 0.1$ となる．したがって，１次元初等理論が適用できる条件は，ほぼ，$a/\Lambda<0.1$ とすることができる．弾性棒についても，この条件は同様[2]で，３次元的影響が顕著にならないための条件は材料特性にはあまり依存していないことがわかる．

4．結言

幾何分散あるいは横方向慣性などの３次元的影響によって，減衰係数は増加し，位相速度は減少する．また，この傾向は，高周波領域になるにつれて，棒の径が大きくなるにつれて顕著になっていく．粘弾性棒の半径を a，伝ぱする波の波長を Λ としたとき， $a/\Lambda<0.1$ 程度であれば３次元的影響を無視でき，１次元初等理論に基づいて正しく減衰・分散が評価できる．また，条件 $a/\Lambda<0.1$ は弾性棒の場合と同じで，材料特性にはあまり依存していない．

5．参考文献

1) Love A. E. H., A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Cambridge University Press, pp.287-291, 1926.

2) Davies R.M., A Critical Study of the Hopkinson Bar, Philosophical Transactions of the Royal Society, Vol.A.240 pp.375-457, 1948.