

液状化後の砂層の沈降・圧密過程に関する Biotの圧密方程式の適用

森尾 敏¹・加登 文学²

要旨：本論文では、Biotの圧密方程式に基づく有限要素法解析を用いて、水膜生成を伴うポスト液状化過程のシミュレーション解析を行う。既に確立された本手法で、水膜生成を含めた実験結果を旨く表現できることを示す。また、シルト層直下の限られた領域の僅かな時間帯において、砂粒子の「沈降」による水膜が発生すること、この時、水膜厚さを含めた下部砂層の厚さは変わらないことを示す。

キーワード：液状化, 水膜, Biotの圧密方程式, 有限要素法

1. はじめに

液状化した地盤の沈下過程に関する考え方には、大きく分けて「圧密現象」と考えるものと、「沈降現象」と考えるものの二つがある¹⁾。しかし、両者の考え方には、お互いに錯綜した所があり、理解を複雑にしているように思われる。本論文では、Biotの圧密方程式に基づく有限要素法解析を用いて、水膜生成を伴うポスト液状化過程のシミュレーション解析を行う。既に確立された本手法で水膜生成を含めた実験結果²⁾が再現できることを示し、両者の関係を明らかにする。

Biotの動的支配方程式に基づく有限要素法解析は、有効応力法液状化解析として、市販の汎用プログラムも含めて数多くの実績があり、実務設計にも広く適用されている。Biotの圧密方程式に基づく有限要素法解析は、この慣性項を無視したものである。本手法も、圧密問題の解明^{3), 4)}、或いは土～水連成解析⁵⁾として、広く普及している。本手法を用いて、ポスト液状化過程の地盤挙動をどこまで説明できるかを明らかにしておくことは、極めて重要である。

2. 解析方法

水で飽和された多孔質体の支配方程式は、Biot⁶⁾により提案されて以来、Ghaboussi⁷⁾, Zienkiewicz⁸⁾, Prevost⁹⁾らにより近似解法を含めた種々の定式化が示された。定式化の方法は、Table.1の4つに分類でき¹⁰⁾、ここに、 u は土骨格の変位、 U は水の変位、 w は土骨格に対する水の相対変位、 p は間隙水圧である。本解析では、Table.1の $u-p$ 形式を用いた有限要素法解析プログラム FLIPDIS^{11), 12)}を用いる。間隙水圧は、節点で定義する Sandhuの方法¹³⁾を用いる。本プログラムは、非排水条件下の有効応力法液状化解析プログラム FLIP¹⁴⁾の結果に基づき、地

震継続時間中及び地震終了後の間隙水圧、地盤変形を応力～浸透連成問題として解析するために開発したものである。

Table.1 Formulation Methods

No.	Formulation
1	$u-U-p$
2	$u-U$
3	$u-w$
4	$u-p$

本論文で用いた土の構成則は、以下の3つである。

eq.1：線形弾性解析

eq.2：ヤング係数 E が平均有効主応力 σ_m に依存する非線形解析

eq.3：ヤング係数 E が間隙水圧比 R に基づく指数関数¹⁵⁾で表示される非線形解析

eq.2, eq.3 の場合、ヤング係数 E は、それぞれ、式(1)及び式(2)で表される。

$$E = E_0 \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{m0}} \right)^{1/2} \quad (1)$$

$$E = \frac{E_0}{\text{Exp}(aR - b) + 1} \quad (2)$$

ここに、 E_0 は初期状態（液状化発生前）のヤング係数、 σ_{m0} は初期状態の平均有効主応力、 a 、 b はパラメーターである。

後述の中間にシルト薄層を挟んだ砂地盤の液状化実験において、初期有効応力を越える間隙水圧が発生する場合があるが、式(1)、式(2)においては、平均有効主応力 σ_m はゼロを下回らない、間隙水圧比 R は1を越えないものとする。

1 舞鶴工業高等専門学校 建設システム工学科 教授

2 舞鶴工業高等専門学校 建設システム工学科 准教授

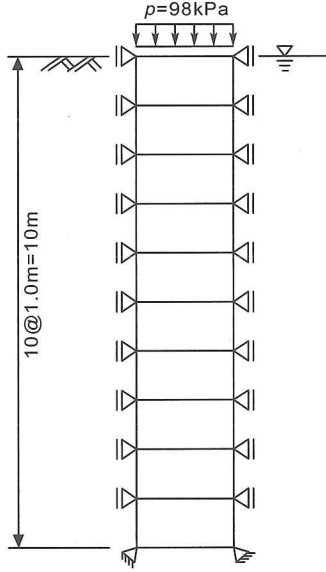


Fig.1 Analysis model

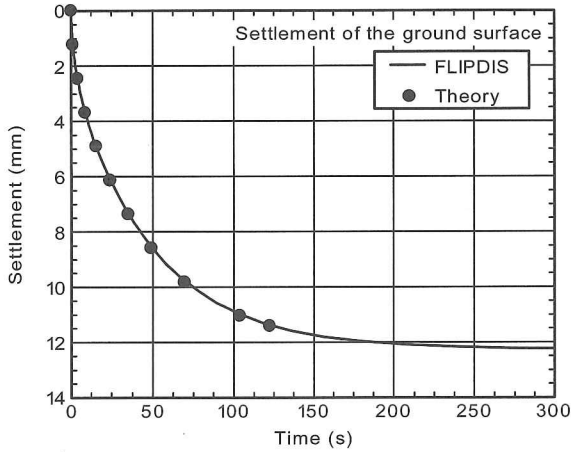


Fig.2 Comparison between FLIPDIS and Terzaghi's theory

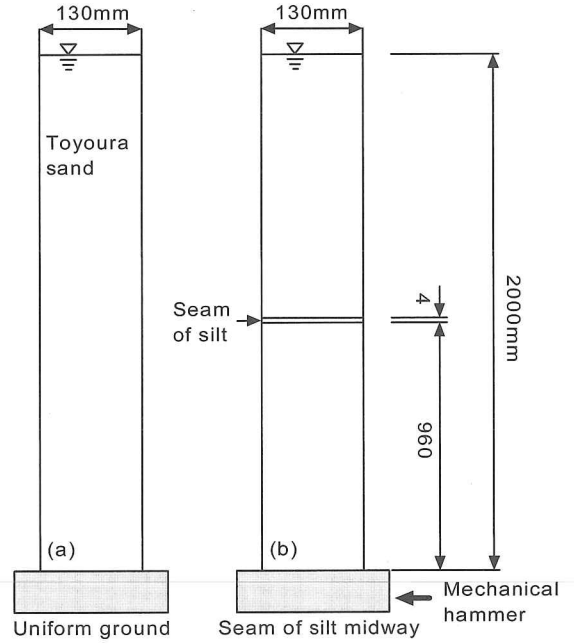


Fig.3 Experiment model

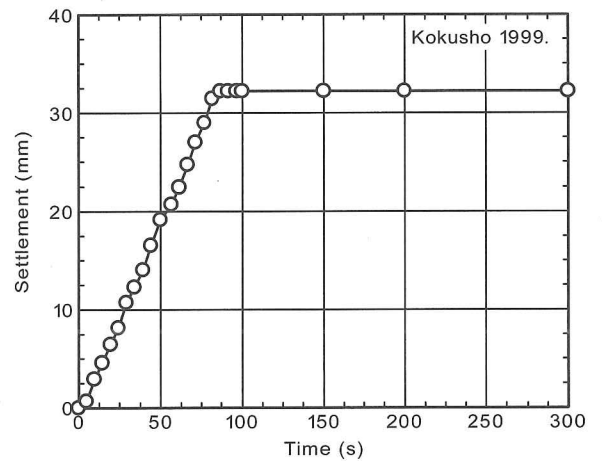


Fig.4 Settlement curve

3. 解析プログラムの検証

液状化実験のシミュレーション解析を行う前に、テルツァギーの圧密理論との比較から、本プログラムの検証を行う。

Fig.1 に示すような深さ $H=10\text{m}$ の地盤に $p=98\text{ kPa}$ の荷重を加えた場合の圧密解析を行った。構造骨格の境界条件は図中に示すように側方ひずみ拘束（1次元圧密状態）、排水条件は上面からの片面排水とした。ヤング係数 $E=53312\text{ kPa}$ 、ポアソン比 $\nu=1/3$ 、透水係数 $k=1.0 \times 10^{-4}\text{ m/s}$ である。

FLIPDIS による解析結果とテルツァギーの圧密理論の比較（時間～沈下関係）を Fig.2 に示す。両者は、完全に一致している。図は省略するが、間隙水圧についても同様である。ここで、テルツァギーの圧密理論における体積圧縮係数 m_v の取り扱いについて述べる。弾性論における応力～ひずみ関係において、側方ひずみが拘束された場合の鉛直方向応力 σ_v と鉛直方向ひずみ ϵ_v の関係は次式である。

$$\sigma_v = [E(1-\nu)/\{(1+\nu)(1-2\nu)\}]\epsilon_v \quad (3)$$

上式から、1次元圧密時の体積圧縮係数 m_v とヤング係数 E の関係は式(4)で表示され、圧密理論における最終沈下量 S は、式(5)となる。

$$m_v = (1+\nu)(1-2\nu)/\{E(1-\nu)\} \quad (4)$$

$$S = m_v pH = 12.25(\text{mm}) \quad (5)$$

4. 液状化実験のシミュレーション解析

4. 1 液状化実験²⁾

國生は、Fig.3 に示すような直径 13cm 、高さ 2m の円筒形土層の底部を打撃することで地盤を一斉に液状化させ、その後の過剰間隙水圧の消散状況

や沈下を観察した。模型地盤は、一様な砂地盤と中間にシルト薄層を挟んだ砂地盤の2種類を用いた。また、簡単な圧密理論を適用してこのシミュレーション解析を行い、時間～沈下関係、水膜厚さの経時変化を再現した。Fig.4 は一様な砂地盤での時間～沈下関係、Fig.5 は間隙水圧分布の経時変化である。Fig.6 は中間にシルト薄層を挟んだ砂地盤での沈下と水膜厚さ、Fig.7 は間隙水圧分布の経時変化である。

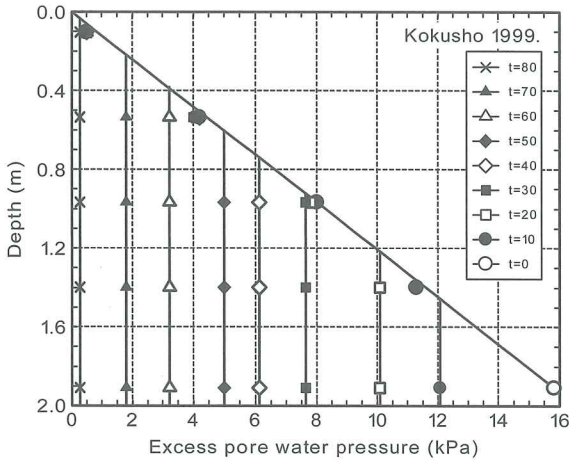


Fig.5 Dissipation of excess pore water pressure

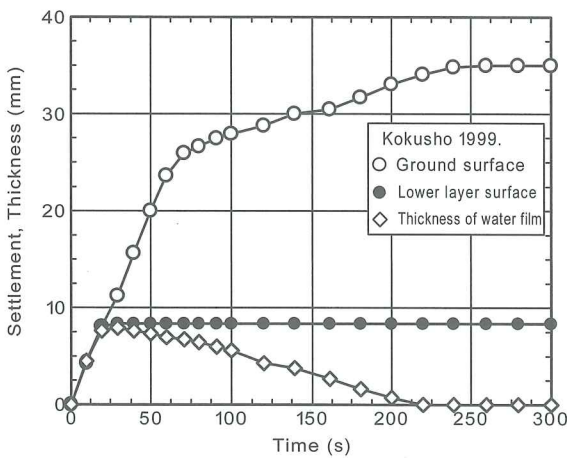


Fig.6 Settlement and layer thickness

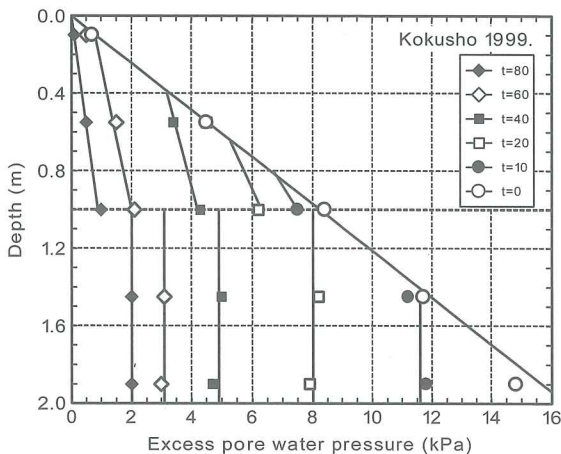


Fig.7 Dissipation of excess pore water pressure

4. 2 一様な地盤の解析

要素分割、境界条件は、Fig.1 と同じものを用いた。ただし、地盤深さ $H=10@20\text{cm}=2\text{m}$ である。間隙水圧の初期値については、全要素が液状化したものと考え、全要素の有効応力をゼロとし、地表面でゼロ、土層下端で 2m となる圧力水頭を与えた。すなわち、水圧が消散した時点で有効応力は液状化前の有効応力に回復する。

Table.2 Analysis cases

		E (kPa)	ν	k (m/s)
eq.1	Linear Elastic	417	1/3	4.0×10^{-3}
				1.0×10^{-3}
				4.0×10^{-4}
eq.2	Nonlinear	1156	1/3	4.0×10^{-4}
eq.3	Nonlinear	10878	1/3	4.0×10^{-4}

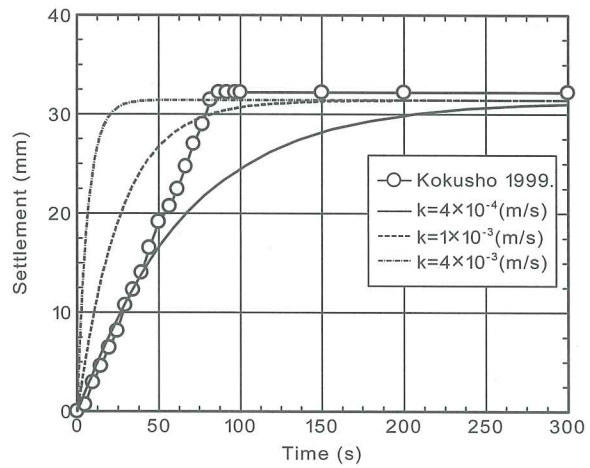


Fig.8 Settlement curve

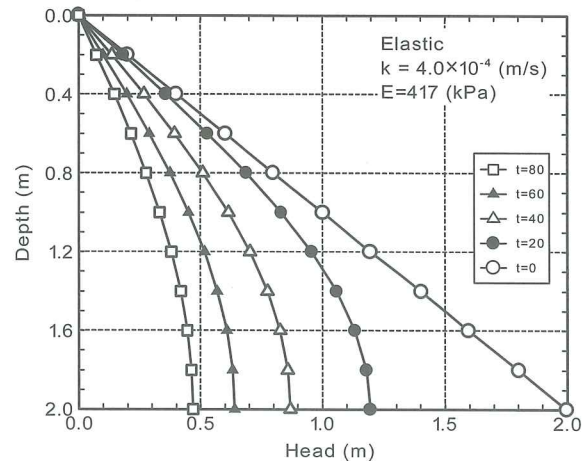


Fig.9 Dissipation of excess pore water pressure

まず、線形弾性解析結果を示す。解析に用いたヤング係数 E 、ポアソン比 ν 、透水係数 k を Table.2 に示す。ヤング係数は、最終沈下量から逆算したが、この妥当性については後述する。

Table.2 の3種類の透水係数を用いた場合の時間～沈下関係を Fig.8 に示す。図中に、実験結果を併

記する。透水係数が大きくなるのに伴い沈下の生じる時間が早くなるが、その形状は指数関数的である。実験結果で見られる傾向、即ち、80秒付近まで沈下速度一定で、この区間で沈下がほぼ終了する傾向は表現されない。

Fig.9 に圧力水頭分布の経時変化を示す。放物線状の分布であり、実験結果 (Fig.5) で見られるような、台形分布で間隙水圧が消散する傾向はみられない。

次に、前述した eq.2, eq.3 の構成式を用いた非線形解析結果を示す。解析に用いた初期ヤング係数 E_0 、ポアソン比 ν 、透水係数 k を Table.2 に示す。eq.3 の場合、式 (2) において $a=9$ 、 $b=4$ を用いた。eq.1, eq.2, eq.3 の構成式を用いた場合の間隙水圧比 R と体積圧縮係数 m_v の関係は Fig.10 の通りであり、縦軸を対数表示している。eq.2, eq.3 の構成式では、風間¹⁾が指摘するように、「有効応力比の回復の初期段階で体積圧縮が大きい」モデル化になっている。

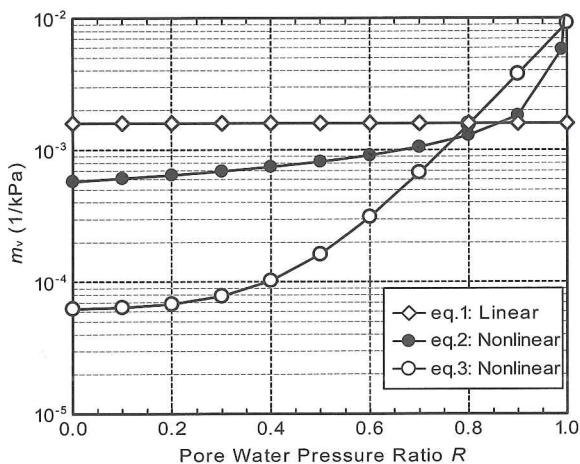


Fig.10 Change in m_v into pore water pressure ratio

eq.1 の弾性解析で用いたヤング係数 E と eq.2, eq.3 の非線形解析で用いた初期ヤング係数 E_0 をせん断弾性係数 G に変換し、これらと岩崎・龍岡¹⁶⁾の豊浦砂の実験データ、安田ら¹⁷⁾のデータを比較したのが Fig.11 である。

ここで、砂層の平均相対密度 $D_r=26\%$ より、間隙比 $e=0.88$ を用いた。同図から、線形弾性解析で用いた弾性係数は、明らかに小さすぎる事が分かる。これは、線形弾性解析で液化後の沈下を再現するには極めて小さな弾性係数を設定する必要があるが、既往の微小ひずみ領域の弾性係数と整合しないことを意味する。一方、eq.3 の非線形解析で用いた初期弾性係数は実験データの下限值に位置しており、概ね妥当な値であると考えられる。

Fig.12 に非線形解析の時間～沈下関係を示す。図中に、線形弾性解析結果、実験結果を併記する。非線形解析、特に eq.3 の構成式を用いた解析では、80秒付近まで沈下速度一定で、この区間で沈下が

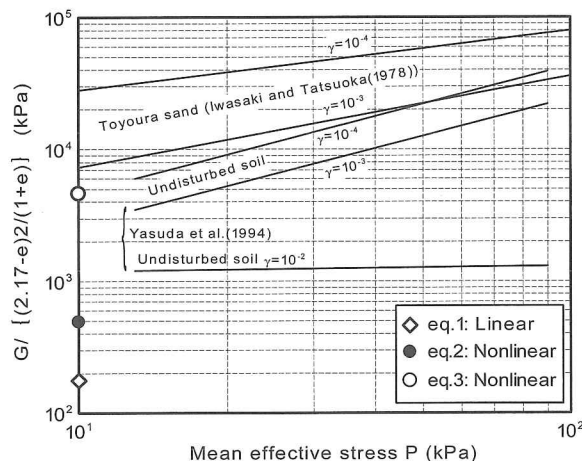


Fig.11 Comparison of moduli of elasticity

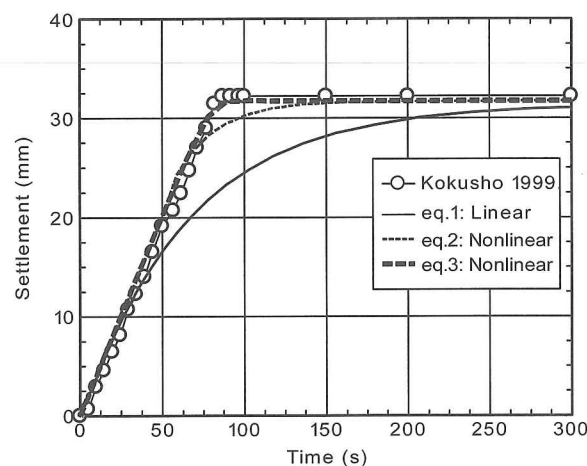


Fig.12 Settlement curve

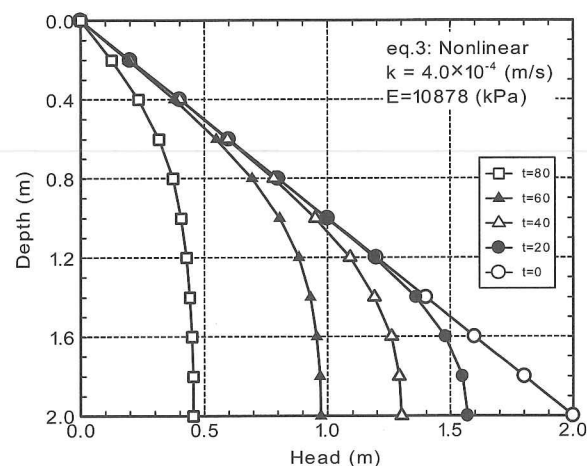


Fig.13 Dissipation of excess pore water pressure

ほぼ終了する実験の傾向が旨く表現されている。この結果は、「地盤の体積圧縮特性のモデル化が鍵」との風間の主張¹⁾を支持する。

同じ透水係数の下で、非線形解析の沈下時間が線形解析に比べて早くなるのは、Fig.10 の間隙水圧比 $R < 0.8$ の領域において、eq.2, eq.3 の体積圧縮係数 m_v が eq.1 に比べて小さく、この結果、圧密理論に

おける圧密係数 C_v が大きく評価されたことに相当する。

なお, eq.3 の構成式を用いた非線形解析において, 要素の深さに応じて初期ヤング係数 E_0 を変化させた解析も行ってみたが, 結果は殆ど変わらなかった。

eq.3 の構成式を用いた場合の圧力水頭分布の経時変化を Fig.13 に示す. 分布が台形分布に近づき, Fig.5 の実験結果に近似する。

4. 3 中間にシルト薄層を挟んだ砂地盤の解析

解析モデルは, 通常の有限要素法解析の手法に従い, Fig.14 に示すように上部砂層, シルト層, 下部砂層をモデル化したものを用いた。

土の構成式は, 一様な砂地盤の挙動を旨く表現した eq.3 の方法を用い, 係数 $a=9, b=4$ を用いた. 各層の初期ヤング係数 E_0 , ポアソン比 ν , 透水係数 k を Table.3 に示す. 各パラメーターは, 実験結果に近似するよう試行錯誤して求めた。

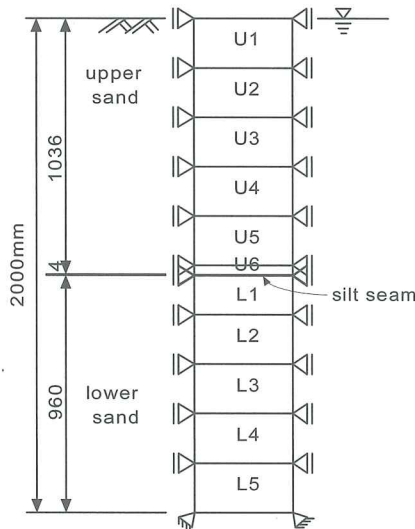


Fig.14 Analysis model

Table.3 Parameters

Layer	E (kPa)	ν	k (m/s)
Upper sand	3724	1/3	4.0×10^{-4}
Silt seam	15484	1/3	1.8×10^{-7}
Lower sand	27440	1/3	4.0×10^{-4}

地表面とシルト層下面 (下部砂層上面) の時間～沈下関係を Fig.15 に示す. 図中に対応する実験結果を併記する. 地表面の沈下は, 70 秒付近まで沈下速度一定で進み, その後, 230 秒程度までゆっくりとした速度で沈下が進行している. この結果は, 実験で見られる沈下挙動を旨く表現している. 一方, シルト層下面 (下部砂層上面) の沈下は, 230 秒程度までゆっくりとした沈下が進行しており, 20 秒付近で沈下がほぼ完了する実験結果と大きく異なる. この理由については後述する。

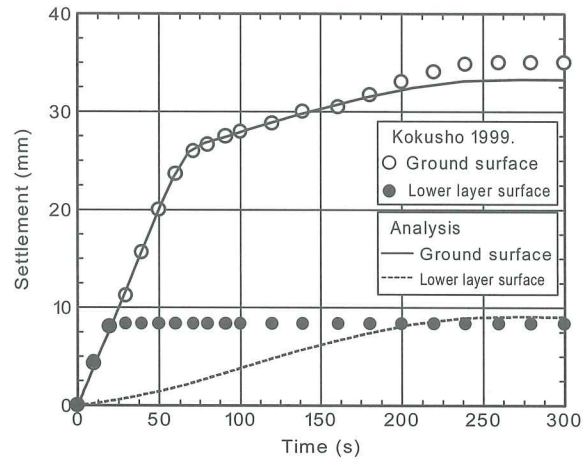


Fig.15 Settlement curve of ground surface and lower layer's surface

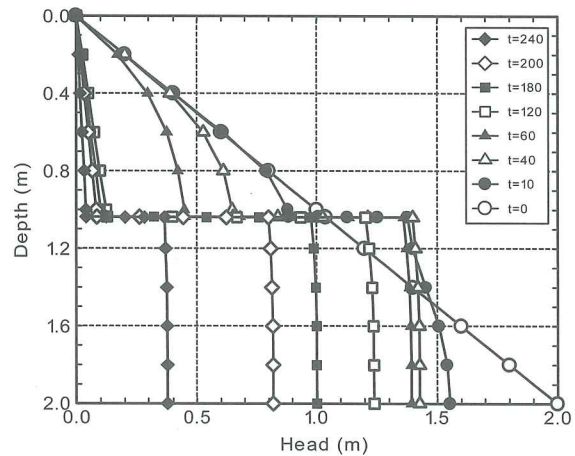


Fig.16 Dissipation of excess pore water pressure

圧力水頭の深さ方向分布の経時変化を Fig.16 に示す. 上部砂層の間隙水圧が三角形に近い形で消散していくのに対し, 下部砂層では間隙水圧一定で消散しており, この傾向は実験結果 (Fig.7) と整合する. 実験結果では, 下部砂層の間隙水圧が初期有効応力を超えることは無い. しかし, 解析ではシルト層下 40cm 付近までの領域で初期有効応力を超える間隙水圧が生じている. この現象は, 下部砂層で発生した過剰間隙水圧が, ほぼ全水頭一定で消散していくことを表し, シルト層の透水係数が極めて小さいために生じたものである。

上部砂層の各要素 (要素 U1～U6) 厚さの経時変化を Fig.17 に, 同様に, 下部砂層の各要素 (要素 L1～L5) 厚さの経時変化を Fig.18 に示す. 図中の Total は, 上部砂層および下部砂層全体の層厚の変化である. Fig.17 から, 上部砂層の層厚変化は 70 秒付近で完了していること, 即ち, 上部砂層の間隙水圧の消散が 70 秒付近で概ね終了していることが分かる. この結果は, Fig.16 の圧力水頭の深さ方向分布と整合する. 一方, Fig.18 の下部砂層の層厚変化は 230 秒程度までゆっくりと進行している。

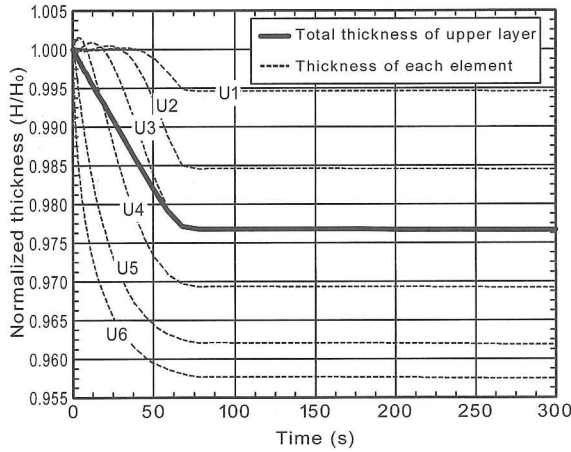


Fig.17 Change of upper layer's thickness

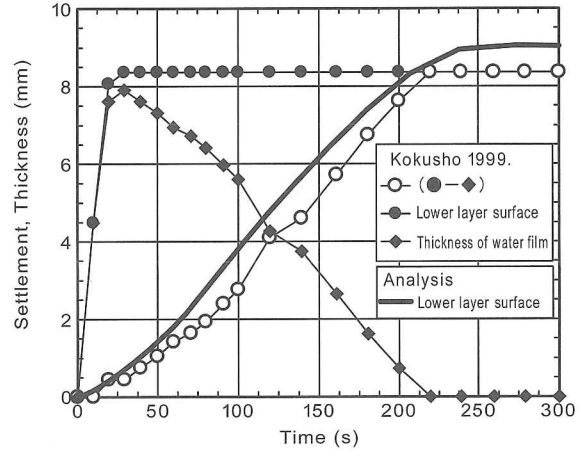


Fig.19 Change of under layer's thickness and water film

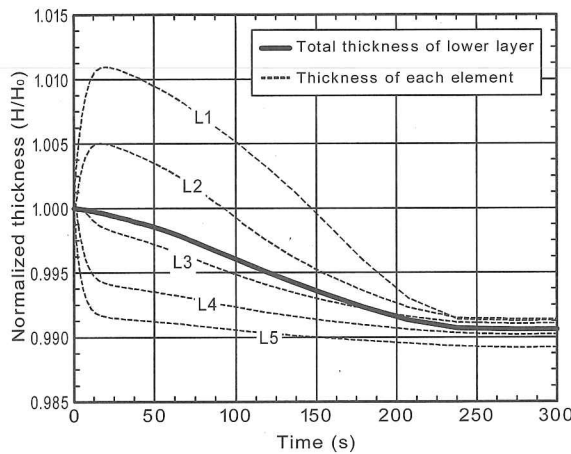


Fig.18 Change of lower layer's thickness

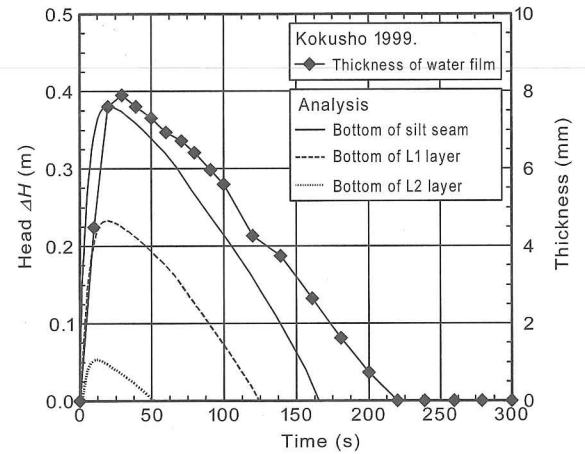


Fig.20 Change of the thickness of water film and Head ΔH

シルト層に近い上部の要素（要素 L1, L2）では下側からの間隙水圧の浸透に伴う膨潤現象がみられ、この継続時間は、Fig.16において、初期有効応力を超える間隙水圧が生じる時間帯と一致する。

以上の結果から、Fig.15における 70 秒付近までの地表面沈下は、上部砂層の沈下と値は小さいが下部砂層の沈下の合計であり、Fig.17 と Fig.18 から、その割合は上部砂層の沈下 90%、下部砂層の沈下 10%である。一方、70 秒付近から 230 秒程度までのゆっくりとした地表面沈下は、下部砂層の沈下に伴うものである。

ここで、液状化実験でみられた水膜現象と Biot の圧密方程式に基づく本解析結果の関連について考える。実験において、下部砂層の沈下は 20 秒付近でほぼ完了している。一方、この時点までの下部砂層からの間隙水圧の消散は僅かであり、大部分の間隙水圧が残留している。しかし、この残留した間隙水圧が消散することによって生じる下部砂層の沈下は、観測されていない。これは、実験で観測された下部砂層上面の沈下は、初期有効応力を超える間隙水圧が下側から浸透してくる条件下での砂粒子の「沈降」であると考えられる。

Fig.6 の実験結果において、下部層上面の沈下か

ら水膜厚さを引いた値を Fig.19 に○印で示す。図中に解析結果（下部砂層上面の沈下）を併記する。両者は旨く一致しており、水膜を下部砂層の一部と捉える必要があることを示している。Fig.20 は、Fig.14 のシルト層下端、L1 層下端、L2 層下端での初期有効応力を越える圧力水頭 ΔH の時刻歴と水膜厚さの時刻歴を比べたものである。シルト層下端の ΔH と水膜厚さの関連は良好であり、水膜が初期有効応力を超える間隙水圧が下側から浸透してくる条件下での砂粒子の「沈降」の結果であることが理解できる。すなわち、水膜が生成された時点で、砂粒子の「沈降」は完了しているが、下部砂層の圧密は完了していない状態といえる。

この砂粒子の「沈降」現象は、シルト層直下の限られた領域において、初期有効応力を越える間隙水圧が生じる時間帯だけに発生するものと考えられる。この時、 $u-p$ 形式の本解析法では、土骨格と水の構成式に用いられるひずみは同じ節点変位から計算されるため、生成された水膜はシルト層直下の砂要素（要素 L1）に含まれ、この要素の一部と考える必要がある。

鶴見ら¹⁸⁾は液状化が土粒子の沈降・再堆積現象であると捉え、土粒子の沈降理論を誘導した。更に、

この理論を用いて國生の実験のシミュレーション解析を行い、実験結果を旨く表現した。この理論とBiotの圧密方程式に基づく本解析法と比較すると、釣り合い式に関しては結果的に同型のものが使われている。しかしながら、この理論は最終体積ひずみ或いは液状化継続時間を既知として、薄層分割した要素の再堆積の判定（接触判定）から変位を求め、応力（水圧）については、変位とは分離して透水解析から求める方法であり、質量保存則が考慮されていないこと、土骨格と水に関する構成式を介していないという点で本解析法と異なる。

5. 結論

水膜生成を伴うポスト液状化過程の挙動は、既に確立された理論であるBiotの圧密方程式の範疇で解析可能であることを示した。得られた結論は以下の通りである。

- 1) テルツァギーの一次元圧密式における体積圧縮係数 m_v と有限要素解析におけるポアソン比 ν 、弾性係数 E との関係を示した。
 - 2) 「有効応力比の回復の初期段階で体積圧縮が大きい¹⁾」構成則を用いることで、実験で得られた沈下の経時変化、間隙水圧分布を近似することができた。
 - 3) この時用いた弾性係数は、既往の微小ひずみ領域での弾性係数と概ね整合する。
 - 4) 液状化後の最終沈下量を線形弾性計算で再現するには、微小ひずみ領域での弾性係数に比べ極端に小さな値を用いざるを得ない。
 - 5) シルト層直下の砂要素では、下側からの間隙水圧の浸透により初期有効応力を越える間隙水圧が発生し、これに伴う膨潤現象もみられる。この限られた領域の限られた時間帯において砂粒子の「沈降」現象が発生し、水膜が形成される。
 - 6) シルト層直下に水膜が形成された時点で、水膜厚さを含めた下部砂層の厚さは変化しない。すなわち、下部砂層の圧密は完了していない。
 - 7) Biotの圧密方程式に基づく本解析では、土骨格と水の構成式に用いられるひずみは同じ節点変位から計算されるため、生成された水膜はシルト層直下の砂要素に含まれ、この一部と考える必要がある。
- 5) Asaoka, A., Nakano, M. and Noda, T.: Soil-Water Coupled Behaviour of Saturated Clay near/at Critical State, *Soils and Foundations*, 34(1), pp.91-106, 1994.
 - 6) Biot, M.A.: General theory of three-dimensional consolidation, *J. Appl. Phys.*, 12, pp.155-164, 1941.
 - 7) Ghaboussi, J. and Wilson, E. L.: Variational formulation of dynamics of fluid-saturated porous elastic solids, *J. Engng. Mech. Div., ASCE*, 98(EM4), 1972.
 - 8) Zienkiewicz, O. C.: *The finite element method* 3rd edition, McGraw-Hill, 1977.
 - 9) Prevost, J. H.: Nonlinear transient phenomenon in saturated porous media, *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, 20, pp.3-8, 1982.
 - 10) Zienkiewicz, O. C. and Shiomi, T.: Dynamic behavior of saturated porous media; The generalized Biot formulation and its numerical solution, *Int. J. Num. and Ana. Method in Geomech.*, Vol.8, pp.71-96, 1984.
 - 11) FLIP 研究会資料: FLIPDIS-FLIP の解析結果を用いた間隙水圧の消散・浸透及び応力～変形連成解析プログラム, 舞鶴工業高等専門学校・建設システム工学科, 2004. <http://www.ptmsg.net/product/flipdis/index.html>
 - 12) 藤井照久, 山崎浩之ほか: レベル2地震動発生における空港施設の変形照査について, 土木学会第60回年次学術講演会, 3-404, pp.807-808, 2005.9.
 - 13) Sandhu, R. S. and Wilson, E. L.: Finite element analysis on seepage in elastic media, *Proc. ASCE*, Vol.95, EM3, pp.641-652, 1969.
 - 14) 井合進, 松永泰男, 亀岡知弘: ひずみ空間における塑性論に基づくサイクリックモビリティのモデル, 港湾技術研究所報告, 第29巻, 第4号, pp.27-56, 1990.
 - 15) 上原清治, 三上博, 高橋直樹ほか: 排水条件を考慮した液状化時の砂の体積圧縮係数について(その2), 第33回地盤工学研究発表会, pp.723-724, 1998.7.
 - 16) 岩崎敏男, 龍岡文夫: Shear moduli of sands under cyclic torsional shear loading, *土質工学論文報告集*, Vol.18, No.1, pp.39-56, 1978.
 - 17) 安田進, 増田民夫ほか: 不攪乱試料の動的変形特性を求める試験条件の検討, 「地盤および土構造物の動的問題における地盤材料の変形特性一試験法・調査法および結果の適用一」に関する国内シンポジウム発表論文集, (社)土質工学会, 土の動的変形定数試験方法基準化委員会, pp.169-174, 1994.1.
 - 18) 鶴見哲也, 中澤博志, 水本邦男, 渡邊啓夫: 土粒子の沈降に基づくポスト液状化過程, *土木学会論文集*, No.743/III-64, pp.35-45, 2003.9.

(2011.1.7 受付)

参考文献:

- 1) 風間基樹: 「土粒子の沈降に基づくポスト液状化過程」への討議, *土木学会論文集*, No.77/III-69, pp.205-208, 2004.12.
- 2) Takeji Kokusyo: Mechanism for water film generation and lateral flow in liquefied sand layer, *Soils and Foundations*, Vol.40, No.5, pp.99-111., 2000.10.
- 3) 赤井浩一, 田村武: 弾塑性構成式による多次元圧密の数値解析, *土木学会論文報告集*, No.269, pp.96-104, 1978.1.
- 4) 飯塚敦: 軟弱地盤の変形・安定解析に関する基礎的研究, 京都大学博士論文, 1988.

ON THE APPLICATION OF BIOT'S CONSOLIDATION THEORY TO THE POST-LIQUEFACTION PROCESS INVOLVING WATER FILM GENERATION

Satoshi MORIO and Yoshinori KATO

ABSTRACT: By using the finite element method based on Biot's consolidation theory, we conducted the simulation analysis of the post-liquefaction process involving water film generation. This analytical procedure has already been verified for solving many other geotechnical problems.

By using this method, we could simulate the experimental results very well. We clarified that water film could be generated by the sedimentation of sand particles at very confined area beneath silt layer and during very limited time. It was also verified that the thickness of the sand layer underlying silt layer did not change.

Key Words : *liquefaction experiment, water film, Biot's consolidation equation, FEM analysis*