単位球面の複素近傍における球関数の指数的増大評価

亀谷　睦 *

概要

単位球面 S^n 上の球関数の標準的な正規直交基底 $\{Y_{l,m}\}$ に対して，S^n の複素近傍における指数的増大評価を示す．この評価式は，単位円周 S^1 上のフーリエ級数の正規直交基底 $\{Y_m(\varphi) = (2\pi)^{-1/2}\, e^{im\varphi}\}$ に対する S^1 の複素近傍における良く知られた評価式 $|Y_m(\varphi)|^2 + |Y_{-m}(\varphi)|^2 \leq \pi^{-1} \exp(2|m||\mathrm{Im}\,\varphi|)$ の高次元版に相当する．我々は第1節で $\{Y_{l,m}\}$ に対する評価式を正確に述べ，第2節においてこの評価式を Gegenbauer 多項式に関する加法定理を用いて証明する．また，第3節ではこの評価式を考える動機となった現在準備中の論文の主結果（円環における Siegel-Moser 理論の高次元アナロジー）を予告する．最後の第4節では，第2節で示した球関数の指数的増大評価を応用して，第3節で予告した論文の基礎を与える1つの補題（実解析関数の調和拡張の正則性）の証明を与える．

キーワード：球関数，指数的増大評価，Gegenbauer 多項式，加法定理

1　はじめに

実ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ における単位球面を S^n とし，$n+1$ 変数 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})$ の複素係数の多項式の全体を $P(\mathbb{R}^{n+1})$ と表す．各 $p \in P(\mathbb{R}^{n+1})$ を S^n 上へ制限して得られる関数

$$Y = p|_{S^n} \tag{1.1}$$

を S^n 上の**球関数**という．球関数は**球面調和関数**とも呼ばれる．その理由は，任意の球関数 Y に対し，(1.1) の右辺に現れる多項式 p を調和多項式にとれることによる（小野 [5]）．

非負整数 l_1 に対し，l_1 次斉次な調和多項式の全体を $H_{l_1}(\mathbb{R}^{n+1})$ と表す．ある $p \in H_{l_1}(\mathbb{R}^{n+1})$ を用いて (1.1) の形に表せる球関数 Y を **l_1 次の球関数**と呼ぶ．l_1 次の球関数の全体を $P_{l_1}(S^n)$，球関数の全体を $P(S^n)$ とそれぞれ表せば，直和分解

$$P(S^n) = \bigoplus_{l_1=0}^{\infty} P_{l_1}(S^n) \tag{1.2}$$

が成り立つ．さらに，分解 (1.2) は，$P(S^n)$ における標準的な内積

$$(Y, Z) := \int_{S^n} Y(\xi)\overline{Z(\xi)}\, d\omega_n(\xi) \tag{1.3}$$

に関する直交分解を与える．このことは，$P_{l_1}(S^n)$ が S^n 上の Laplace-Beltrami 作用素（の -1 倍）$-\Lambda_n$ の，固有値 $\lambda_{l_1} := l_1(l_1+n-1)$ に応じる固有空間に一致すること，つまり，任意の $Y \in P_{l_1}(S^n)$ が次の関係式を満たすことから出る：

$$-\Lambda_n Y = \lambda_{l_1} Y = l_1\,(l_1+n-1)\,Y. \tag{1.4}$$

また，$P_{l_1}(S^n)$ は有限次元のベクトル空間であり，その次元を $h_{l_1}(n)$ とおけば

$$\begin{aligned} h_{l_1}(n) &= \dim P_{l_1}(S^n) = \dim H_{l_1}(\mathbb{R}^{n+1}) \\ &= \binom{l_1+n}{n} - \binom{l_1+n-2}{n}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

さて，l_1 次の球関数全体のなすベクトル空間 $P_{l_1}(S^n)$ の，内積 (1.3) に関する標準的な正規直交基底として，次の命題 1.1 のように変数分離した形の関数からなる関数族 $\{Y_{l,m}(\theta, \varphi)\}$ をとれることが知られている（竹内 [7]）．

非負整数 k と正の半整数 ν に対して，**Gegenbauer の微分方程式**

$$(1-t^2)\frac{d^2y}{dt^2} - (2\nu+1)t\frac{dy}{dt} + k(k+2\nu)y = 0 \tag{1.6}$$

の多項式解 $y(t)$ で，初期条件 $y(1) = \dfrac{(k+2\nu-1)!}{k!\,(2\nu-1)!}$ を満たすものを，**Gegenbauer 多項式**といい，$C_k^{\nu}(t)$ と書く．(1.6) の多項式解の全体は1次元であるので，$C_k^{\nu}(t)$ はただ一つに定まり，その次数は k 次になる（竹内 [7]）．また，別の生成関数的な定義もある．これによれば $C_k^{\nu}(t)$ は次の関係式によって定義される（Andrews-Askey-Roy [1]）：

$$(1-2rt+r^2)^{-\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{\nu}(t)\, r^k. \tag{1.7}$$

* 舞鶴工業高等専門学校　自然科学部門　准教授

この $C_k^\nu(t)$ に対して，**Gegenbauer の同伴関数**$C_k^{\nu,p}(t)$ $(k \geq p \geq 0)$ を

$$C_k^{\nu,p}(t) := (1-t^2)^{p/2}\left(\frac{d}{dt}\right)^p C_k^\nu(t) \tag{1.8}$$

により定める．さらに，半整数の有限列 $\{\nu_j\}$ を

$$\nu_j := \frac{1}{2}(n-j) \quad (j = 1, \cdots, n-1) \tag{1.9}$$

で定める．以上の準備の下で

命題 1.1 不等式

$$l_1 \geq l_2 \geq \cdots \geq l_{n-1} \geq |m| \tag{1.10}$$

を満たす $(l, m) = (l_1, \cdots, l_{n-1}, m) \in \mathbb{Z}^n$ に対して，S^n の極座標を $(\theta, \varphi) \in [0, \pi]^{n-1} \times \mathbb{R}$ として，(θ, φ) の関数 $Y_{l,m}(\theta, \varphi)$ を次のように定める：

$$Y_{l,m}(\theta, \varphi) := \sqrt{b_{l,m}}\, e^{im\varphi} \prod_{j=1}^{n-1} C_{l_j}^{\nu_j, l_{j+1}}(\cos\theta_j). \tag{1.11}$$

ただし，$b_{l,m}$ は適当な正規化定数であり，$l_n := |m|$ である．このとき，任意に固定された非負整数 l_1 に対して，不等式 (1.10) を満たすような $(l', m) = (l_2, \cdots, l_{n-1}, m) \in \mathbb{Z}^{n-1}$ の全体を $D_{l_1}^{(n-1)}$ と表すと，各 l_1 に対して，(1.11) で定義される関数族 $\{Y_{l,m}\}$ の有限部分族 $\{Y_{l,m}\,;\,(l', m) \in D_{l_1}^{(n-1)}\}$ は $P_{l_1}(S^n)$ の正規直交基底をなす．

さてこの論文の目的は，関数族 $\{Y_{l,m}\}$ に対して，単位球面 S^n の複素近傍において以下の定理 1.3 のような指数的増大評価を示すことである．結果を述べるために，複素近傍をまず定義しよう．

定義 1.2 $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$ と集合 $[0, \pi]^{n-1}$ の**距離**$d\left(\theta, [0, \pi]^{n-1}\right)$ を

$$d\left(\theta, [0, \pi]^{n-1}\right) := \sum_{j=1}^{n-1} \inf_{x_j \in [0, \pi]} |\theta_j - x_j| \tag{1.12}$$

により定める．また，$a > 0$ に対して，S^n の**複素近傍**A_a を次で定める：

$$A_a := \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{C}^n\,;\; d\left(\theta, [0, \pi]^{n-1}\right) + |\mathrm{Im}\,\varphi| < a\}. \tag{1.13}$$

このとき，主定理を次のように述べることができる．

定理 1.3 $(\theta, \varphi) \in A_a$ のとき，すべての非負整数 l_1 に対して，

$$\sum_{(l', m) \in D_{l_1}^{(n-1)}} |Y_{l,m}(\theta, \varphi)|^2 \leq \frac{h_{l_1}(n)}{\omega_n} \exp\left(2a\lambda_{l_1}^{1/2}\right) \tag{1.14}$$

が成立する．ただし，$h_{l_1}(n) = \dim P_{l_1}(S^n)$ は (1.5) で与えられ，ω_n は S^n の n 次元体積

$$\omega_n = \int_{S^n} d\omega_n(\xi)$$

を表す．また，$\lambda_{l_1} = l_1(l_1 + n - 1)$ は $-\Lambda_n$ の第 l_1 固有値である．

注意 1.4 $n = 1$ のときの S^1 上の球関数（円関数）の正規直交基底

$$\{Y_m(\varphi) = (2\pi)^{-1/2} e^{im\varphi}\,;\, m \in \mathbb{Z}\}$$

に対しては，S^1 の複素近傍 $|\mathrm{Im}\,\varphi| < a$ において不等式

$$|Y_m(\varphi)|^2 + |Y_{-m}(\varphi)|^2 \leq \pi^{-1} \exp(2a|m|) \tag{1.15}$$

が成り立つ．我々の示したい不等式 (1.14) は，この (1.15) の $n \geq 2$ の場合への拡張に相当する．

実際，$n = 1$ のとき，S^1 上の Laplace-Beltrami 作用素は

$$-\Lambda_1 = -\frac{d^2}{d\varphi^2}$$

であり，これは固有値 $\lambda_m = m^2$ をもつ．したがって，(1.15) の右辺に現れる指数関数の増大度 $|m|$ は $\lambda_m^{1/2}$ に対応している．また，固有値 λ_m に属する固有空間は，２つの関数 Y_m, Y_{-m} によって張られる m 次斉次な円関数の空間 $P_m(S^1)$ に一致する．これより，$h_m(1) = \dim P_m(S^1) = 2$ がわかる．さらにまた，S^1 の１次元体積（周の長さ）は $\omega_1 = 2\pi$ である．したがって，(1.15) の右辺に現れる定数 π^{-1} は，$n = 1$ のときの不等式 (1.14) の右辺の係数

$$\frac{h_m(1)}{\omega_1} = \frac{2}{2\pi}$$

に他ならない．

2　定理 1.3 の証明

６つの段階に分けて証明する．証明に用いる主な道具は，l_1 次の Gegenbauer 多項式 $C_{l_1}^{\nu_1}(t)$ に関する加法定理，正則関数に関する一致の定理および $C_{l_1}^{\nu_1}(\cos\theta)$ の表示式，の３つである．

第１段：命題 2.1 への帰着

定理 1.3 においては，容易に予想できるように，(1.11) で定義される $Y_{l,m}(\theta,\varphi)$ の $n-1$ 個の因子 $C_{l_j}^{\nu_j, l_{j+1}}(\cos\theta_j)$ の寄与が重要であって，指数関数因子 $e^{im\varphi}$ の寄与は重要ではない．実際，前者の寄与を示す次の命題が本質的であり，これをいえば定理 1.3 はただちに証明される．このことをまず確かめるのが，この第 1 段の目標である．

命題 2.1 $\theta\in\mathbb{C}^{n-1}$ が $d\left(\theta,[0,\pi]^{n-1}\right)\le a'$ を満たすとき，次の評価が成り立つ：

$$\sum_{(l',m)\in D_{l_1}^{(n-1)}} b_{l,m}\prod_{j=1}^{n-1}\left|C_{l_j}^{\nu_j, l_{j+1}}(\cos\theta_j)\right|^2 \le \frac{h_{l_1}(n)}{\omega_n}\exp\left(2a'\lambda_{l_1}^{1/2}\right). \tag{2.1}$$

「命題 2.1$\Longrightarrow$ 定理 1.3」の証明．

$(\theta,\varphi)\in A_a$ とすると，(1.13) から

$$d\left(\theta,[0,\pi]^{n-1}\right) < a-|\mathrm{Im}\,\varphi| \tag{2.2}$$

が成り立つ．一方，明らかに

$$|e^{im\varphi}|^2 = e^{-2m\,\mathrm{Im}\varphi} \le e^{2|m||\mathrm{Im}\varphi|} \le e^{2l_1|\mathrm{Im}\varphi|}. \tag{2.3}$$

すると，(2.3) と，(2.2) の下での命題 2.1 から

$$\begin{aligned}
&\sum_{(l',m)\in D_{l_1}^{(n-1)}} |Y_{l,m}(\theta,\varphi)|^2\\
&= \sum_{(l',m)\in D_{l_1}^{(n-1)}} b_{l,m}|e^{im\varphi}|^2\prod_{j=1}^{n-1}\left|C_{l_j}^{\nu_j, l_{j+1}}(\cos\theta_j)\right|^2\\
&\le e^{2l_1|\mathrm{Im}\varphi|}\sum_{(l',m)\in D_{l_1}^{(n-1)}} b_{l,m}\prod_{j=1}^{n-1}\left|C_{l_j}^{\nu_j, l_{j+1}}(\cos\theta_j)\right|^2\\
&\le e^{2l_1|\mathrm{Im}\varphi|}\frac{h_{l_1}(n)}{\omega_n}\exp\left(2(a-|\mathrm{Im}\,\varphi|)\lambda_{l_1}^{1/2}\right)\\
&\le \frac{h_{l_1}(n)}{\omega_n}\exp\left(2a\lambda_{l_1}^{1/2}\right)
\end{aligned}$$

となって，定理 1.3 の結論 (1.14) が得られる．ただし最後の不等式を得るところで，$l_1\le\lambda_{l_1}^{1/2}$ であることを用いた．（証明おわり）

第 2 段：加法定理の極座標による書き換え

Gegenbauer 多項式 $C_{l_1}^{\nu_1}(t)$ に関する**加法定理**とは次の定理をいう（Andrews-Askey-Roy [1]）．なお，$n=2$ の場合の加法定理は，小野 [5] にも述べられている．

定理 2.2（加法定理）l_1 次の球関数の全体のなすベクトル空間 $P_{l_1}(S^n)$ の任意の正規直交基底を $\{S_{l_1,j}(\xi)\,;\,j=1,\cdots,h_{l_1}(n)\}$ とすれば，S^n 上の任意の 2 点 ξ,η に対して，次の等式が成り立つ：

$$\sum_{j=1}^{h_{l_1}(n)} S_{l_1,j}(\xi)\overline{S_{l_1,j}(\eta)} = \frac{h_{l_1}(n)}{\omega_n}\frac{C_{l_1}^{\nu_1}((\xi,\eta))}{C_{l_1}^{\nu_1}(1)}. \tag{2.4}$$

ただし，(ξ,η) は $\mathbb{R}^{n+1}$ における ξ と η の内積

$$(\xi,\eta)=\sum_{k=1}^{n+1}\xi_k\eta_k \tag{2.5}$$

を表す．

さて，この加法定理を命題 1.1 の正規直交基底 $\{Y_{l,m}\,;\,(l',m)\in D_{l_1}^{(n-1)}\}$ に適用する．$\xi,\eta\in S^n$ の極座標をそれぞれ (α,φ_1), (β,φ_2) とおき，さらに $\varphi=\varphi_1-\varphi_2$ とおくと，加法定理の結論の等式 (2.4) は次のように書き直される：

$$\sum_{(l',m)\in D_{l_1}^{(n-1)}} Y_{l,m}(\alpha,\varphi_1)\overline{Y_{l,m}(\beta,\varphi_2)} = \frac{h_{l_1}(n)}{\omega_n}\frac{C_{l_1}^{\nu_1}(I(\alpha,\beta,\varphi))}{C_{l_1}^{\nu_1}(1)}. \tag{2.6}$$

ここで，$I(\alpha,\beta,\varphi)$ は，(2.5) で定まる内積 (ξ,η) を極座標で表して得られる関数であり，具体的には

$$\begin{aligned}
I(\alpha,\beta,\varphi) &= (\xi,\eta)\\
&= \sum_{j=1}^{n-1}\cos\alpha_j\cos\beta_j\prod_{k=1}^{j-1}\sin\alpha_k\sin\beta_k\\
&\quad + \cos\varphi\prod_{k=1}^{n-1}\sin\alpha_k\sin\beta_k
\end{aligned} \tag{2.7}$$

となる．他方 (2.6) の左辺は，多項式 $C_{l_j}^{\nu_j}(t)$ が実係数であることを用いると

$$\begin{aligned}
&\sum_{(l',m)\in D_{l_1}^{(n-1)}} Y_{l,m}(\alpha,\varphi_1)\overline{Y_{l,m}(\beta,\varphi_2)}\\
&= \sum_{(l',m)\in D_{l_1}^{(n-1)}} b_{l,m}\,e^{im\varphi}\\
&\quad\times\prod_{j=1}^{n-1} C_{l_j}^{\nu_j, l_{j+1}}(\cos\alpha_j)\,C_{l_j}^{\nu_j, l_{j+1}}(\cos\beta_j)
\end{aligned}$$

となる．したがって (2.6) は，任意の $(\alpha,\beta,\varphi)\in[0,\pi]^{n-1}\times[0,\pi]^{n-1}\times\mathbb{R}$ に対して，次の等式が成り立つことを意味する：

$$\begin{aligned}
&\sum_{(l',m)\in D_{l_1}^{(n-1)}} b_{l,m}\,e^{im\varphi}\\
&\times\prod_{j=1}^{n-1} C_{l_j}^{\nu_j, l_{j+1}}(\cos\alpha_j)\,C_{l_j}^{\nu_j, l_{j+1}}(\cos\beta_j)\\
&= \frac{h_{l_1}(n)}{\omega_n}\frac{C_{l_1}^{\nu_1}(I(\alpha,\beta,\varphi))}{C_{l_1}^{\nu_1}(1)}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

第３段：正則関数に関する一致の定理の適用

(2.7) から，関数 $I(\alpha,\,\beta,\,\varphi)$ は $(\alpha,\,\beta,\,\varphi)$ の整関数になる．すると，(2.8) の右辺もまた，多項式 $C^{\nu_1}_{l_1}(t)$ の定数倍に整関数 $t=I(\alpha,\,\beta,\,\varphi)$ を代入したものであるから，$(\alpha,\,\beta,\,\varphi)$ の整関数になることがわかる．

他方，(2.8) の左辺については，Gegenbauer の同伴関数の定義 (1.8) によって，各 j について

$$
\begin{aligned}
&C^{\nu_j,\,l_{j+1}}_{l_j}(\cos\alpha_j)\\
=&(1-t^2)^{l_{j+1}/2}\left(\frac{d}{dt}\right)^{l_{j+1}} C^{\nu_j}_{l_j}(t)\Bigg|_{t=\cos\alpha_j}\\
=&\,(\sin\alpha_j)^{l_{j+1}}\,\frac{d^{\,l_{j+1}}C^{\nu_j}_{l_j}}{dt^{\,l_{j+1}}}(\cos\alpha_j)
\end{aligned}
$$

となるから，$C^{\nu_j,\,l_{j+1}}_{l_j}(\cos\alpha_j)$ は α_j の整関数である．同様に，$C^{\nu_j,\,l_{j+1}}_{l_j}(\cos\beta_j)$ も β_j の整関数である．さらに $e^{im\varphi}$ はもちろん φ の整関数である．したがって，(2.8) の左辺もまた $(\alpha,\,\beta,\,\varphi)$ の整関数になることがわかる．

以上で，等式 (2.8) の両辺は $(\alpha,\,\beta,\,\varphi)$ の整関数であることがわかった．したがって，この等式は，両辺に現れる２つの整関数が $(\alpha,\,\beta,\,\varphi)\in[0,\,\pi]^{n-1}\times[0,\,\pi]^{n-1}\times\mathbb{R}$ のときに一致することを意味する．すると，正則関数に関するよく知られた次の一致の定理（伊藤-小松 [2]）によって，この等式はすべての $(\alpha,\,\beta,\,\varphi)\in\mathbb{C}^{n-1}\times\mathbb{C}^{n-1}\times\mathbb{C}$ に対して成立することになる．

定理 2.3（一致の定理） $f,\,g$ は $\mathbb{C}^N$ の連結開集合 Ω において正則で，１点 $a\in\Omega$ においてすべての多重指数 $\gamma=(\gamma_1,\,\cdots,\,\gamma_N)$ に対して $\partial^\gamma f(a)=\partial^\gamma g(a)$ ならば，Ω 全体で $f=g$ である．

そこで改めて，複素数 $\theta_j\in\mathbb{C}$ $(j=1,\,\cdots,\,n-1)$ を任意に与えて，一致の定理によって定義域を広げられた等式 (2.8) において $\alpha_j=\theta_j,\,\beta_j=\overline{\theta_j}$ $(j=1,\,\cdots,\,n-1),\,\varphi=0$ ととると，次が得られる：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{(l',\,m)\in D^{(n-1)}_{l_1}} b_{l,\,m}\\
&\times\prod_{j=1}^{n-1} C^{\nu_j,\,l_{j+1}}_{l_j}(\cos\theta_j)\,C^{\nu_j,\,l_{j+1}}_{l_j}(\cos\overline{\theta_j})\\
=&\frac{h_{l_1}(n)}{\omega_n}\,\frac{C^{\nu_1}_{l_1}(I(\theta,\,\overline{\theta},\,0))}{C^{\nu_1}_{l_1}(1)}.
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

ここで，多項式 $C^{\nu_j}_{l_j}(t)$ が実係数であることから

$$
\begin{aligned}
&C^{\nu_j,\,l_{j+1}}_{l_j}(\cos\overline{\theta_j})\\
&=(\sin\overline{\theta_j})^{l_{j+1}}\,\frac{d^{\,l_{j+1}}C^{\nu_j}_{l_j}}{dt^{\,l_{j+1}}}(\cos\overline{\theta_j})\\
&=(\overline{\sin\theta_j})^{l_{j+1}}\,\frac{d^{\,l_{j+1}}C^{\nu_j}_{l_j}}{dt^{\,l_{j+1}}}(\overline{\cos\theta_j})\\
&=\overline{(\sin\theta_j)^{l_{j+1}}\,\frac{d^{\,l_{j+1}}C^{\nu_j}_{l_j}}{dt^{\,l_{j+1}}}(\cos\theta_j)}\\
&=\overline{C^{\nu_j,\,l_{j+1}}_{l_j}(\cos\theta_j)}
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

となることに注意すれば，等式 (2.9) は

$$
\begin{aligned}
&\sum_{(l',\,m)\in D^{(n-1)}_{l_1}} b_{l,\,m}\prod_{j=1}^{n-1}\left|C^{\nu_j,\,l_{j+1}}_{l_j}(\cos\theta_j)\right|^2\\
=&\frac{h_{l_1}(n)}{\omega_n}\,\frac{C^{\nu_1}_{l_1}(I(\theta,\,\overline{\theta},\,0))}{C^{\nu_1}_{l_1}(1)}
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

となって，この左辺は命題 2.1 の (2.1) の左辺に等しい．したがって，命題 2.1 を証明するには，(2.11) の右辺が $[0,\,\pi]^{n-1}$ の複素近傍 $d\left(\theta,\,[0,\,\pi]^{n-1}\right)\le a'$ において命題 2.1 の評価を満たすことを示せばよいことがわかった．

第４段：$I(\theta,\,\overline{\theta},\,0)$ の値域の評価

この段落においては $I(\theta,\,\overline{\theta},\,0)$ の値域を評価する．我々は以後，n に関する帰納法を何度か用いる．そこで $I(\theta,\,\overline{\theta},\,0)$ の n への依存性を明記するために，記号を改めて次のようにおく：

$$
\begin{aligned}
J_n(\theta)&:=I(\theta,\,\overline{\theta},\,0)\\
&=\sum_{j=1}^{n-1}\cos\theta_j\cos\overline{\theta_j}\prod_{k=1}^{j-1}\sin\theta_k\sin\overline{\theta_k}\\
&\quad+(\cos 0)\prod_{k=1}^{n-1}\sin\theta_k\sin\overline{\theta_k}\\
&=\sum_{j=1}^{n-1}|\cos\theta_j|^2\prod_{k=1}^{j-1}|\sin\theta_k|^2\\
&\quad+\prod_{k=1}^{n-1}|\sin\theta_k|^2.
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

補題 2.4 $n\ge 2$ のとき，任意の $\theta\in\mathbb{C}^{n-1}$ に対して

$$
\begin{aligned}
1\le J_n(\theta)&\le\prod_{j=1}^{n-1}\left(|\cos\theta_j|^2+|\sin\theta_j|^2\right)\\
&=\prod_{j=1}^{n-1}\cos\left(\theta_j-\overline{\theta_j}\right)
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

が成り立つ．

証明．$n(\geq 2)$ についての帰納法による．まず，$n=2$ のときは (2.12) において $n=2$ として，

$$\begin{aligned} J_2(\theta) &= |\cos\theta_1|^2 + |\sin\theta_1|^2 \\ &= \cos\theta_1 \cos\overline{\theta_1} + \sin\theta_1 \sin\overline{\theta_1} \\ &= \cos\left(\theta_1 - \overline{\theta_1}\right) \end{aligned}$$

である．これより，まず補題 2.4 の右側の不等式は，$n=2$ のときには等式として成り立つことがいえる．さらに

$$\begin{aligned} J_2(\theta) &= \cos\left(\theta_1 - \overline{\theta_1}\right) \\ &= \cos(2i\mathrm{Im}\theta_1) \\ &= 2^{-1}\left(e^{-2\mathrm{Im}\theta_1} + e^{2\mathrm{Im}\theta_1}\right) \\ &\geq \sqrt{e^{-2\mathrm{Im}\theta_1} e^{2\mathrm{Im}\theta_1}} = 1 \end{aligned}$$

であるから，補題 2.4 の左側の不等式もいえる．ゆえに，$n=2$ のとき，補題 2.4 は成り立つ．

次に $n \geq 3$ とし，$n-1$ のときには補題 2.4 が成り立つと仮定する．(2.12) から一般に，$\theta' = (\theta_2, \cdots, \theta_{n-1})$ として漸化式

$$J_n(\theta) = |\cos\theta_1|^2 + |\sin\theta_1|^2 J_{n-1}(\theta') \tag{2.14}$$

が成り立つ．また，帰納法の仮定から

$$\begin{aligned} 1 \leq J_{n-1}(\theta') &\leq \prod_{j=2}^{n-1}\left(|\cos\theta_j|^2 + |\sin\theta_j|^2\right) \\ &= \prod_{j=2}^{n-1}\cos\left(\theta_j - \overline{\theta_j}\right) \end{aligned} \tag{2.15}$$

である．この (2.14) と (2.15) を用いれば，次の不等式が成り立つことがいえる．

$$\begin{aligned} 1 &\leq |\cos\theta_1|^2 + |\sin\theta_1|^2 \\ &\leq |\cos\theta_1|^2 + |\sin\theta_1|^2 J_{n-1}(\theta') = J_n(\theta) \\ &\leq |\cos\theta_1|^2 + |\sin\theta_1|^2 \prod_{j=2}^{n-1}\left(|\cos\theta_j|^2 + |\sin\theta_j|^2\right) \\ &\leq \left(|\cos\theta_1|^2 + |\sin\theta_1|^2\right)\prod_{j=2}^{n-1}\left(|\cos\theta_j|^2 + |\sin\theta_j|^2\right) \\ &= \prod_{j=1}^{n-1}\left(|\cos\theta_j|^2 + |\sin\theta_j|^2\right) \\ &= \prod_{j=1}^{n-1}\cos\left(\theta_j - \overline{\theta_j}\right). \end{aligned}$$

したがって，n のときにも補題 2.4 が成り立つ．（証明おわり）

補題 2.5 $\tau_j \geq 1$ $(j=1, \cdots, n)$ のとき，

$$\prod_{j=1}^{n}\left(\tau_j + \tau_j^{-1}\right) \leq 2^{n-1}\left\{\prod_{j=1}^{n}\tau_j + \left(\prod_{j=1}^{n}\tau_j\right)^{-1}\right\} \tag{2.16}$$

が成り立つ．

証明．$n(\geq 1)$ についての帰納法による．まず $n=1$ のときは，補題 2.5 は明らかに等号で成り立つ．次に $n \geq 2$ とし，$n-1$ のときには補題 2.5 が成り立つと仮定する．(2.16) の両辺はともに $\tau_1, \cdots, \tau_n$ の対称式であるから，一般性を失うことなく $\tau_1 \geq \cdots \geq \tau_n$ が成り立っているとしてよい．すると帰納法の仮定から

$$\begin{aligned} &\prod_{j=1}^{n}\left(\tau_j + \tau_j^{-1}\right) \\ &= \left\{\prod_{j=1}^{n-1}\left(\tau_j + \tau_j^{-1}\right)\right\}\left(\tau_n + \tau_n^{-1}\right) \\ &\leq 2^{n-2}\left\{\prod_{j=1}^{n-1}\tau_j + \left(\prod_{j=1}^{n-1}\tau_j\right)^{-1}\right\}\left(\tau_n + \tau_n^{-1}\right) \\ &= 2^{n-2}\left\{\prod_{j=1}^{n}\tau_j + \left(\prod_{j=1}^{n}\tau_j\right)^{-1}\right. \\ &\qquad \left. + \tau_n^{-1}\prod_{j=1}^{n-1}\tau_j + \tau_n\left(\prod_{j=1}^{n-1}\tau_j\right)^{-1}\right\} \end{aligned} \tag{2.17}$$

となる．ここで，τ_j の大小関係と $\tau_n^{-1} \leq 1 \leq \tau_n$ によって

$$1 \leq \tau_n^{-1}\prod_{j=1}^{n-1}\tau_j \leq \prod_{j=1}^{n}\tau_j$$

であるから，関数 $t + t^{-1}$ が $t \geq 1$ において増加であることによって

$$\begin{aligned} &\tau_n^{-1}\prod_{j=1}^{n-1}\tau_j + \tau_n\left(\prod_{j=1}^{n-1}\tau_j\right)^{-1} \\ &\leq \prod_{j=1}^{n}\tau_j + \left(\prod_{j=1}^{n}\tau_j\right)^{-1} \end{aligned} \tag{2.18}$$

が得られる．この (2.18) を (2.17) の右辺に用いて

$$
\begin{aligned}
&\prod_{j=1}^{n}\left(\tau_j+\tau_j^{-1}\right)\\
&\le 2^{n-2}\times 2\left\{\prod_{j=1}^{n}\tau_j+\left(\prod_{j=1}^{n}\tau_j\right)^{-1}\right\}\\
&=2^{n-1}\left\{\prod_{j=1}^{n}\tau_j+\left(\prod_{j=1}^{n}\tau_j\right)^{-1}\right\}.
\end{aligned}
$$

したがって，n のときにも補題 2.5 が成り立つ．（証明おわり）

補題 2.5 の系として，次が得られる．

系 2.6 $\tau_j \ge 1\ (j=1,\cdots,n)$ のとき，

$$
\begin{aligned}
1&\le\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\tau_j+\tau_j^{-1}\right)\\
&\le\frac{1}{2}\left\{\prod_{j=1}^{n}\tau_j+\left(\prod_{j=1}^{n}\tau_j\right)^{-1}\right\}
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

が成り立つ．とくに $\tau_j=e^{t_j}\ (t_j\ge 0)$ とおけば

$$
1\le\prod_{j=1}^{n}\cosh t_j\le\cosh\left(\sum_{j=1}^{n}t_j\right). \tag{2.20}
$$

証明．前半の (2.19) の右側の不等式は，補題 2.5 の (2.16) の両辺を 2^n で割れば直ちに得られる．また (2.19) の左側の不等式は，各 j について $2^{-1}(\tau_j+\tau_j^{-1})\ge 1$ であることから従う．さらに後半の (2.20) は，(2.19) に $\tau_j=e^{t_j}\ (t_j\ge 0)$ を代入すれば得られる．（証明おわり）

補題 2.4 と系 2.6 によって，この段落の結論として，$I(\theta,\overline{\theta},0)$ の値域についての次の不等式が得られる．

$$
\begin{aligned}
1&\le J_n(\theta)=I(\theta,\overline{\theta},0)\\
&\le\prod_{j=1}^{n-1}\left(|\cos\theta_j|^2+|\sin\theta_j|^2\right)\\
&=\prod_{j=1}^{n-1}\cos\left(\theta_j-\overline{\theta_j}\right)\\
&=\prod_{j=1}^{n-1}\cos\left(2i\mathrm{Im}\theta_j\right)=\prod_{j=1}^{n-1}\cosh\left(2\mathrm{Im}\theta_j\right)\\
&=\prod_{j=1}^{n-1}\cosh\left(2|\mathrm{Im}\theta_j|\right)\\
&\le\cosh\left(2\sum_{j=1}^{n-1}|\mathrm{Im}\theta_j|\right)=\cos\left(2i\sum_{j=1}^{n-1}|\mathrm{Im}\theta_j|\right).
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

第５段：$C_k^{\nu}(\cos\theta)$ の明示的な表示式

第３段の最後で述べたように，命題 2.1 を証明するには，(2.11) の右辺が $[0,\pi]^{n-1}$ の複素近傍 $d\left(\theta,[0,\pi]^{n-1}\right)\le a'$ において命題 2.1 の評価を満たすことを示せばよい．第４段で得た $I(\theta,\overline{\theta},0)$ の値域の評価を用いてこれを実行するには，$C_k^{\nu}(\cos\theta)$ の明示的な表示式が必要となる．この段ではそれを示す．

補題 2.7 非負整数 k と正の半整数 ν に対して

$$
C_k^{\nu}(\cos\theta)=\sum_{p=0}^{k}\frac{(\nu)_p(\nu)_{k-p}}{p!\,(k-p)!}\cos(k-2p)\theta \tag{2.22}
$$

が成り立つ．ただし，整数 $p\ge 1$ に対して

$$
(\nu)_p:=\nu(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+p-1)
$$

であり，$p=0$ のときは $(\nu)_0:=1$ と定める．

証明 (Andrews-Askey-Roy [1])．Gegenbauer 多項式 $C_k^{\nu}(t)$ の生成関数的な定義 (1.7) に $t=\cos\theta$ を代入すると次の等式を得る：

$$
(1-2r\cos\theta+r^2)^{-\nu}=\sum_{k=0}^{\infty}C_k^{\nu}(\cos\theta)\,r^k. \tag{2.23}
$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
1-2r\cos\theta+r^2&=1-r\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)+r^2\\
&=\left(1-re^{i\theta}\right)\left(1-re^{-i\theta}\right)
\end{aligned}
$$

であるから，(2.23) の左辺は二項展開によって次のように書き直せる．

$$
\begin{aligned}
&\left(1-re^{i\theta}\right)^{-\nu}\left(1-re^{-i\theta}\right)^{-\nu}\\
&=\sum_{p=0}^{\infty}\binom{-\nu}{p}\left(-re^{i\theta}\right)^p\sum_{q=0}^{\infty}\binom{-\nu}{q}\left(-re^{-i\theta}\right)^q\\
&=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\binom{-\nu}{p}\binom{-\nu}{q}(-1)^{p+q}e^{i(p-q)\theta}\,r^{p+q}\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{p+q=k}\binom{-\nu}{p}\binom{-\nu}{q}(-1)^{p+q}e^{i(p-q)\theta}\right]r^k.
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

(2.23) と (2.24) の右辺どうしを比較して

$$
\begin{aligned}
&C_k^{\nu}(\cos\theta)\\
&=\sum_{p+q=k}\binom{-\nu}{p}\binom{-\nu}{q}(-1)^{p+q}e^{i(p-q)\theta}\\
&=\sum_{p+q=k}\frac{(\nu)_p(\nu)_q}{p!\,q!}e^{i(p-q)\theta}
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

となる．ここで (2.25) の左辺は θ を $-\theta$ にとりかえても不変であるから，

$$\begin{aligned}
&C_k^{\nu}(\cos\theta)\\
=&\frac{1}{2}\left\{C_k^{\nu}(\cos\theta)+C_k^{\nu}(\cos(-\theta))\right\}\\
=&\sum_{p+q=k}\frac{(\nu)_p(\nu)_q}{p!\,q!}\,\frac{1}{2}\left(e^{i(p-q)\theta}+e^{-i(p-q)\theta}\right)\\
=&\sum_{p+q=k}\frac{(\nu)_p(\nu)_q}{p!\,q!}\cos(p-q)\theta\\
=&\sum_{p=0}^{k}\frac{(\nu)_p(\nu)_{k-p}}{p!\,(k-p)!}\cos(2p-k)\theta\\
=&\sum_{p=0}^{k}\frac{(\nu)_p(\nu)_{k-p}}{p!\,(k-p)!}\cos(k-2p)\theta
\end{aligned}$$

となって，補題 2.7 が成り立つ．（証明おわり）

第６段：命題 2.1 の証明の完成

第４段の結論の (2.21) によれば

$$1=\cosh 0\le I(\theta,\overline{\theta},0)\le\cosh\left(2\sum_{j=1}^{n-1}|\mathrm{Im}\theta_j|\right)\tag{2.26}$$

であるから，関数 $\cosh 2s$ が $s\ge 0$ において連続かつ増加であることを用いれば，任意の $\theta\in\mathbb{C}^{n-1}$ に対して，一意的に定まる実数

$$s(\theta)\in\left[0,\ \sum_{j=1}^{n-1}|\mathrm{Im}\theta_j|\right]\tag{2.27}$$

が存在して，

$$I(\theta,\overline{\theta},0)=\cosh(2s(\theta))=\cos(2is(\theta))\tag{2.28}$$

が成り立つ．補題 2.7 で $k=l_1$, $\nu=\nu_1$ ととって，$I(\theta,\overline{\theta},0)$ に上の (2.28) と (2.27) を使うと，

$$\begin{aligned}
&C_{l_1}^{\nu_1}(I(\theta,\overline{\theta},0))\\
=&C_{l_1}^{\nu_1}(\cos(2is(\theta)))\\
=&\sum_{p=0}^{l_1}\frac{(\nu_1)_p(\nu_1)_{l_1-p}}{p!\,(l_1-p)!}\cos((l_1-2p)2is(\theta))\\
=&\sum_{p=0}^{l_1}\frac{(\nu_1)_p(\nu_1)_{l_1-p}}{p!\,(l_1-p)!}\cosh((l_1-2p)2s(\theta))\\
=&\sum_{p=0}^{l_1}\frac{(\nu_1)_p(\nu_1)_{l_1-p}}{p!\,(l_1-p)!}\cosh(|2l_1-4p|\,s(\theta))\\
\le&\cosh(2l_1s(\theta))\sum_{p=0}^{l_1}\frac{(\nu_1)_p(\nu_1)_{l_1-p}}{p!\,(l_1-p)!}\\
=&\cosh(2l_1s(\theta))\,C_{l_1}^{\nu_1}(\cos 0)\\
\le&\cosh\left(2l_1\sum_{j=1}^{n-1}|\mathrm{Im}\theta_j|\right)C_{l_1}^{\nu_1}(1)
\end{aligned}\tag{2.29}$$

がいえる．ここで，θ が $[0,\pi]^{n-1}$ の複素近傍 $d\left(\theta,[0,\pi]^{n-1}\right)\le a'$ にあれば，$j=1,\cdots,n-1$ について

$$|\mathrm{Im}\theta_j|\le\inf_{x_j\in[0,\pi]}|\theta_j-x_j|$$

となることに注意して，

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n-1}|\mathrm{Im}\theta_j|\le&\sum_{j=1}^{n-1}\inf_{x_j\in[0,\pi]}|\theta_j-x_j|\\
=&d\left(\theta,[0,\pi]^{n-1}\right)\le a'
\end{aligned}\tag{2.30}$$

であることがわかる．したがって，(2.30) および $l_1\le\lambda_{l_1}^{1/2}$ を (2.29) の右辺に用いれば，

$$\begin{aligned}
C_{l_1}^{\nu_1}(I(\theta,\overline{\theta},0))\le&\cosh(2l_1a')\,C_{l_1}^{\nu_1}(1)\\
\le&C_{l_1}^{\nu_1}(1)\exp\left(2a'\lambda_{l_1}^{1/2}\right)
\end{aligned}$$

となる．ゆえに，(2.11) から

$$\begin{aligned}
&\sum_{(l',m)\in D_{l_1}^{(n-1)}}b_{l,m}\prod_{j=1}^{n-1}\left|C_{l_j}^{\nu_j,l_{j+1}}(\cos\theta_j)\right|^2\\
=&\frac{h_{l_1}(n)}{\omega_n}\,\frac{C_{l_1}^{\nu_1}(I(\theta,\overline{\theta},0))}{C_{l_1}^{\nu_1}(1)}\\
\le&\frac{h_{l_1}(n)}{\omega_n}\exp\left(2a'\lambda_{l_1}^{1/2}\right)
\end{aligned}$$

となって，命題 2.1 が得られた．（証明おわり）

3　円環における Siegel-Moser 理論の高次元アナロジー

第１段：球関数展開

次の命題から始めよう．

命題 3.1 S^n 上の任意の連続関数 $k \in C(S^n)$ は球関数によって S^n 上一様に近似される．

証明（吉田 [8]）．S^n 上の与えられた連続関数を $k = k(\theta, \varphi)$ として，これを閉球 $B^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} ; |x| \leq 1\}$ 上の連続関数 $K(r, \theta, \varphi)$ に次のように拡張する：

$$K(r, \theta, \varphi) := r\, k(\theta, \varphi) \quad (0 \leq r \leq 1).$$

ただし，(r, θ, φ) は $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ の極座標である．すると，よく知られた Weierstrass の多項式近似定理によって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある多項式 $p \in P(\mathbb{R}^{n+1})$ を

$$\sup_{x \in B^{n+1}} |K(x) - p(x)| \leq \varepsilon$$

となるように選ぶことができ，これより，元の k は球関数 $p|_{S^n}$ によって，S^n 上一様に近似できることがわかる．（証明おわり）

命題 3.1 と球関数の空間 $P(S^n)$ の直交直和分解 (1.2) から，任意の連続関数 $k \in C(S^n)$ は

$$k(\theta, \varphi) = \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{(l', m) \in D_{l_1}^{(n-1)}} a_{l,m} Y_{l,m}(\theta, \varphi) \quad (3.1)$$

の形に**球関数展開**され，右辺の級数は一様収束することがわかる．また，$\{Y_{l,m}\}$ の正規直交性から，展開係数 $a_{l,m}$ は次で定まる：

$$\begin{aligned} a_{l,m} &= (k, Y_{l,m})_{L^2(S^n)} \\ &= \int_{S^n} k(\xi) \overline{Y_{l,m}(\xi)}\, d\omega_n(\xi). \end{aligned} \quad (3.2)$$

上の事実（球関数展開可能性）は，1次元単位球面 S^1（単位円周）上でフーリエ級数展開を用いて構成できたものが，高次元単位球面 S^n 上では球関数展開を用いて構成できるだろうことを示唆する．そこで，このような問題の一例として，現在準備中の論文（Kametani [3]）の内容を予告し，その中で我々の定理 1.3 がどのように応用されるかを手短かに紹介しよう．

有名な教科書 (Siegel-Moser [6]) において，Siegel-Moser は円環上のツイスト写像に解析的な微小摂動を加えた写像に対して，不変曲線の存在を示した．この高次元の類似，すなわち，Siegel-Moser が円環 $A = S^1 \times I$ でやったことを高次元の球殻 $B = S^n \times I$ $(n \geq 2)$ において考え，彼らの結果の類似が成り立つことを示すことが論文 [3] の目的である．ここで I は，区間 $(0, \infty)$ の部分区間を表す．

第２段：Siegel-Moser の結果

まず Siegel-Moser [6] の不変曲線の存在定理を正確に述べよう．単位円周 S^1 の極座標 φ を用いて，円環 $A = S^1 \times I$ の点を (φ, ρ) と表す．A 上の**ツイスト写像**とは写像 $T_1 : A \to A$ で

$$T_1(\varphi, \rho) = (\varphi + \rho, \rho)$$

となるものをいう．このとき，任意の $\omega \in I$ に対し，曲線 $S^1 \times \{\omega\}$ は T_1 の作用で不変な曲線となる．T_1 に微小摂動を加えた写像 M として

$$M(\varphi, \rho) = (\varphi + \rho + g, \rho + h) \quad (3.3)$$

を考える．ただし，g, h は (φ, ρ) の実解析的な関数で，変数 φ について 2π-周期的であるとする．このような状況で Siegel-Moser は，曲線 $S^1 \times \{\omega\}$ の近くに写像 M の作用で不変な曲線 C があるかという問題を立て，これに対して次のような解答を与えた．

定理 3.2 (Siegel-Moser [6]) ω が**ディオファントス的**である，つまり，正定数 C_0 と正の整数 μ が存在して，すべての整数 $m \neq 0$ と整数 k に対して，

$$\left| \frac{\omega}{2\pi} m - k \right| \geq C_0 |m|^{-\mu} \quad (3.4)$$

が成り立つとする．また，写像 M は**交差性質をもつ**，つまり，円環 A において $S^1 \times \{\omega\}$ とホモトピックな任意の閉曲線 $\Gamma \subset A$ に対して

$$M(\Gamma) \cap \Gamma \neq \emptyset$$

が成り立つとする．さらに，M の定義 (3.3) に現れる実解析的関数 g, h は十分小さい正数 a, b に対して，$S^1 \times \{\omega\}$ の複素近傍

$$\begin{aligned} X_{a,b} := &\{(\varphi, \rho) \in \mathbb{C}^2 : \\ &|\mathrm{Im}\varphi| < a,\ |\rho - \omega| < b\} \end{aligned}$$

における有界な正則関数に拡張できるとする．このとき，ある正数 ε_0 が存在して，すべての $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ に対して，ある正数 $\delta = \delta(C_0, \mu, a, b, \varepsilon)$ をとれば，複素近傍 $X_{a,b}$ 上で $|g| + |h| \leq \delta$ を満たすような任意の M に対して，次の３条件 (i) から (iii) を満たすような正則関数 $\Phi(y)$, $R(y)$ が存在する：

(i) $\Phi(y)$, $R(y)$ は集合 $|\mathrm{Im}\, y| < a/2$ 上で有界かつ正則で，周期 2π の周期関数である．

(ii) 集合 $|\mathrm{Im}\, y| < a/2$ 上で $|\Phi(y)| + |R(y)| \leq \varepsilon$ である．

(iii) 任意の y に対して，恒等式

$$\begin{aligned}&M(y+\Phi(y),\,\omega+R(y))\\&=(y+\omega+\Phi(y+\omega),\,\omega+R(y+\omega))\end{aligned}$$

が成り立つ．

この定理 3.2 によって，その仮定の下では，上の問題は肯定的に解けることになる．実際，定理 3.2 のいう関数 $\Phi(y)$, $R(y)$ を用いて，曲線 C を

$$C=\{(y+\Phi(y),\,\omega+R(y))\,;\,|\mathrm{Im}\,y|<a/2\}$$

で定めれば，これが上の問題の解答，つまり，曲線 $S^1\times\{\omega\}$ の近くにあるような，写像 M の作用で不変な曲線となる．

第３段：定理 3.2 の高次元アナロジー

現在準備中の論文 [3] の目的は，第１段の末尾でのべたように Siegel-Moser [6] の円環 $A=S^1\times I$ を一般次元の球殻 $B=S^n\times I$ $(n\geq 2)$ に取りかえて，上の定理 3.2 の類似が成立することを示すことである．まずその設定を述べよう．

n 次元単位球面 S^n $(n\geq 2)$ の極座標を $(\theta,\varphi)=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_{n-1},\varphi)\in[0,\pi]^{n-1}\times\mathbb{R}$ として，ツイスト写像 $T_n:B\to B$ を次のように設定する．

$$T_n(\theta,\varphi,\rho)=(\theta,\varphi+\rho,\rho). \tag{3.5}$$

任意の $\omega\in I$ に対して，集合 $S^n\times\{\omega\}$ は写像 T_n の作用で不変な超曲面である．T_n に微小摂動を加えた写像

$$M(\theta,\varphi,\rho)=(\theta+f,\varphi+\rho+g,\rho+h) \tag{3.6}$$

を考える．ただし，$f=(f_1,\cdots,f_{n-1})$ として，f_j, g, h は $S^n\times\{\omega\}$ のある近傍上で定義された (θ,φ,ρ) の実解析関数で，変数 φ について周期 2π の周期関数であり，$|f|+|g|+|h|=\sum_{j=1}^{n-1}|f_j|+|g|+|h|$ は十分小さいとする．

命題 1.1 の $Y_{l,m}(\theta,\varphi)$ は l_1 次の球関数であるから，l_1 次のある調和多項式 $Q_{l,m}(x)\in H_{l_1}(\mathbb{R}^{n+1})$ があって，$x\in\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ の極座標を (r,θ,φ) とすると

$$Q_{l,m}(x)=r^{l_1}Y_{l,m}(\theta,\varphi) \tag{3.7}$$

が成り立つ．この (3.7) を逆に見れば，$Y_{l,m}(\theta,\varphi)$ は常に調和多項式 $r^{l_1}Y_{l,m}(\theta,\varphi)$ に拡張されるということである．この事実を用いて，次の定義をする．

定義 3.3　超曲面 $S^n\times\{\omega\}$ のある近傍で定義された連続関数 $k(\theta,\varphi,\rho)$ の変数 (θ,φ) についての球関数展開を

$$\begin{aligned}&k(\theta,\varphi,\rho)\\&=\sum_{(l,m)}(k(\cdot,\rho),Y_{l,m})_{L^2(S^n)}\,Y_{l,m}(\theta,\varphi)\end{aligned}$$

とするとき，この関数 k の**調和拡張**$k^*(r,\theta,\varphi,\rho)$ を次のように定める：

$$\begin{aligned}&k^*(r,\theta,\varphi,\rho)\\&:=\sum_{(l,m)}(k(\cdot,\rho),Y_{l,m})_{L^2(S^n)}\,r^{l_1}Y_{l,m}(\theta,\varphi).\end{aligned} \tag{3.8}$$

この定義は，見かけ上は調和多項式からなる形式的級数を与えるだけのように見える．しかし次の補題により，k が実解析的であれば (3.8) の右辺の級数は，$\{r=1\}\times[0,\pi]^{n-1}\times\mathbb{R}\times\{\rho=\omega\}$ のある複素近傍 $X^*_{a,b}$ において絶対収束することがわかる．また，(3.6) の写像 M に対して，その**調和拡張**M^* を

$$\begin{aligned}&M^*(r,\theta,\varphi,\rho)\\&:=(r,\theta+f^*,\varphi+\rho+g^*,\rho+h^*)\end{aligned} \tag{3.9}$$

により定める．

$f^*|_{r=1}=f$ などが成り立つから，次のことがなりたつことに注意する．

$$M^*(1,\theta,\varphi,\rho)=(1,M(\theta,\varphi,\rho)). \tag{3.10}$$

補題 3.4　$k(\theta,\varphi,\rho)$ が実解析的であれば，ある正数 a,b があって，$k^*(r,\theta,\varphi,\rho)$ は次で定まる複素近傍 $X^*_{a,b}=A^*_a\times B_b$ において絶対収束して，$X^*_{a,b}$ 上の正則関数を定める．ただし，$a,b>0$ に対して集合 A^*_a, B_b を次で定める：

$$\begin{aligned}A^*_a:=&\{(r,\theta,\varphi)\in\mathbb{C}^{n+1}\,;\\&|r-1|+d\left(\theta,[0,\pi]^{n-1}\right)+|\mathrm{Im}\,\varphi|<a\},\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$B_b:=\{\rho\in\mathbb{C}\,;\,|\rho-\omega|<b\}. \tag{3.12}$$

したがって，$a,b>0$ を十分小さくとれば，M^* は $X^*_{a,b}$ 上の正則な写像となる．

次に交差性質を定めるための準備をする．まず，$X^*_{a,b}$ における複素曲線 Γ^0 と n 個の複素超曲面 $\Sigma^0_1,\cdots,\Sigma^0_n$ をそれぞれ

$$\begin{aligned}\Gamma^0:=&\{(r,\theta,\varphi,\rho)\in X^*_{a,b}\,:\\&r=r^0,\,\theta=\theta^0,\,\rho=\rho^0\}\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}\Sigma^0_j:=&\{(r,\theta,\varphi,\rho)\in X^*_{a,b}\,:\,\theta_j=\theta^0_j\}\\&(1\leq j\leq n-1)\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\Sigma^0_n:=\{(r,\theta,\varphi,\rho)\in X^*_{a,b}\,:\,\rho=\rho^0\} \tag{3.15}$$

により定める．ただし，$(r^0,\,\theta^0,\,\rho^0)$ は

$$|r^0-1|+d\left(\theta^0,\,[0,\,\pi]^{n-1}\right)<a,\ \ |\rho^0-\omega|<b$$

を満たすような任意定数の組である．次に $X^*_{a,\,b}$ における別の複素曲線 Γ と複素超曲面 $\Sigma_1,\cdots,\Sigma_n$ がそれぞれ，次の形に与えられているとする．

$$\begin{aligned}\Gamma :=&\{(r(t),\,\theta(t),\,\varphi(t),\,\rho(t))\in X^*_{a,\,b}:\\ &t\text{ は複素パラメータ}\}\end{aligned}\tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_j :=&\{(r,\,\theta,\,\varphi,\,\rho)\in X^*_{a,\,b}:\psi_j(r,\,\theta,\,\varphi,\,\rho)=0\}\\ &(j=1,\cdots,n)\end{aligned}\tag{3.17}$$

ただし，

$$\varphi(0)=0,\,\varphi(2\pi)=2\pi$$

とし，$(r(t),\,\theta(t),\,\rho(t))$ は 2π-周期的だとする．このとき次の定義をおく．

定義 3.5　(3.16) と (3.17) の形をした $(n+1)$-組 $(\Gamma,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_n)$ が，$X^*_{a,\,b}$ **において** $(n+1)$**-組** $(\Gamma^0,\,\Sigma^0_1,\cdots,\Sigma^0_n)$ **に十分近い**とは，$\Gamma\subset\Sigma_1\cap\cdots\cap\Sigma_n$ であり，しかも以下の３条件が成り立つことである：

$$|r'(t)|+|\theta'(t)|+|\rho'(t)|<a|\varphi'(t)|\tag{3.18}$$

$$\left|\frac{\partial\psi_j}{\partial r}\right|+\sum_{i\neq j}\left|\frac{\partial\psi_j}{\partial\theta_i}\right|+\left|\frac{\partial\psi_j}{\partial\varphi}\right|+\left|\frac{\partial\psi_j}{\partial\rho}\right|<a\left|\frac{\partial\psi_j}{\partial\theta_j}\right|\quad(1\le j\le n-1)\tag{3.19}$$

$$\left|\frac{\partial\psi_n}{\partial r}\right|+\sum_{i=1}^{n-1}\left|\frac{\partial\psi_n}{\partial\theta_i}\right|+\left|\frac{\partial\psi_n}{\partial\varphi}\right|<a\left|\frac{\partial\psi_n}{\partial\rho}\right|\quad(j=n)\tag{3.20}$$

定義 3.5 は，２つの曲線 Γ と Γ^0 の接ベクトルの向きの差が小さく，$j=1,\cdots,n$ に対して，２つの超曲面 Σ_j と Σ^0_j の余法線ベクトルの向きの差が小さいことを意味する．そして，その小ささが $X^*_{a,\,b}$ のパラメータ a によってコントロールされているということが重要である．

定義 3.6　写像 M^* が $X^*_{a,\,b}$ **において交差性質をもつ**とは，$X^*_{a,\,b}$ において $(\Gamma^0,\,\Sigma^0_1,\cdots,\Sigma^0_n)$ に十分近いような任意の $(n+1)$-組 $(\Gamma,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_n)$ に対して，次の n 個の条件が成り立つときをいう：

$$M(\Gamma)\cap\Sigma_j\neq\emptyset\quad(j=1,\cdots,n).$$

以上の準備の下で論文 [3] の主定理を述べよう．

定理 3.7　ω が定理 3.2 の意味においてディオファントス的であり，写像 M の調和拡張 M^* は，$X^*_{a,\,b}$ において有界かつ正則で，$X^*_{a,\,b}$ において交差性質を持つとする．このとき，ある正数 ε_0 が存在して，すべての $\varepsilon\in(0,\,\varepsilon_0)$ に対して，ある正数 $\delta=\delta(C_0,\,\mu,\,n,\,a,\,b,\,\varepsilon)$ をとれば，集合 $X^*_{a,\,b}$ 上で $|f^*|+|g^*|+|h^*|\le\delta$ なる任意の M に対して，次の (i) から (iii) を満たすような関数 $\Theta_j(x,\,y)$ $(1\le j\le n-1)$, $\Phi(x,\,y)$, $R(x,\,y)$ が存在する：

(i) Θ_j, Φ, R は集合 $[0,\,\pi]^{n-1}\times\mathbb{R}$ 上で連続で，変数 y について周期 2π の周期関数である．

(ii) 集合 $[0,\,\pi]^{n-1}\times\mathbb{R}$ 上で $|\Theta|+|\Phi|+|R|\le\varepsilon$ が成り立つ．ただし，$\Theta=(\Theta_1,\cdots,\Theta_{n-1})$ である．

(iii) 任意の $(x,\,y)$ に対して，次の恒等式が成り立つ．

$$\begin{aligned}&M(x+\Theta(x,\,y),\,y+\Phi(x,\,y),\,\omega+R(x,\,y))\\ =&(x+\Theta(x,\,y+\omega),\,y+\omega+\Phi(x,\,y+\omega),\\ &\ \omega+R(x,\,y+\omega)).\end{aligned}$$

この定理 3.7 によって，超曲面 S を

$$\begin{aligned}S=\{(\theta,\,\varphi,\,\rho)\ :&\theta=x+\Theta(x,\,y),\\ &\varphi=y+\Phi(x,\,y),\\ &\rho=\omega+R(x,\,y)\\ &\quad(x,\,y)\in[0,\,\pi]^{n-1}\times\mathbb{R}\}\end{aligned}$$

で定めると，次が成り立つことがわかる．まず，(iii) によって，S は M の作用で不変であり，S 上での M の作用は $S^n\times\{\omega\}$ 上でのツイスト写像の作用と共役になる．また，(ii) から，この S が $S^n\times\{\omega\}$ に近いことがわかる．最後に (i) から，S が連続な超曲面だとわかる．

4　補題 3.4 の証明

この最後の第４節では，この論文の主定理 1.3 がどのように応用されるかを説明したい．その一例として，準備中の論文 [3] の理論全体の基礎を与える補題 3.4 の証明において，定理 1.3 がどう用いられるかを説明しよう．

第１段：いくつかの準備

岡本 [4] にある，いくつかの定義および命題や補題から始める．

定義 4.1　Λ_n を S^n 上の Laplace-Beltrami 作用素とする．正数 γ と S^n 上の無限回微分可能関数 $k\in C^\infty(S^n)$ に対して，

$$\mu_\gamma(k):=\sup_{j\ge0}\frac{1}{(2j)!\,\gamma^{2j}}\|(-\Lambda_n)^jk\|_{L^2(S^n)}\tag{4.1}$$

とおく．

命題 4.2（岡本 [4]）S^n 上の無限回微分可能関数 $k \in C^\infty(S^n)$ が S^n 上で実解析的となるための必要十分条件は，ある正数 γ が存在して

$$\mu_\gamma(k) < \infty \tag{4.2}$$

となることである．

$-\Lambda_n$ の固有値が $\{\lambda_{l_1} = l_1(l_1+n-1)\} \subset [0,\infty)$ であったことを用いて，次の定義をおく．

定義 4.3 S^n 上の Laplace-Beltrami 作用素 Λ_n に対して，作用素 $\sqrt{-\Lambda_n}$ の定義域 $D(\sqrt{-\Lambda_n})$ を

$$\begin{aligned} &D(\sqrt{-\Lambda_n}) \\ :=&\{k \in L^2(S^n);\\ &\sum_{(l,m)} \lambda_{l_1}^{1/2}(k, Y_{l,m})_{L^2(S^n)} Y_{l,m} \in L^2(S^n)\}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

により与え，各 $k \in D(\sqrt{-\Lambda_n})$ に対し

$$\sqrt{-\Lambda_n}\, k := \sum_{(l,m)} \lambda_{l_1}^{1/2}(k, Y_{l,m})_{L^2(S^n)} Y_{l,m} \tag{4.4}$$

によって作用素 $\sqrt{-\Lambda_n}$ を定義する．

この作用素 $\sqrt{-\Lambda_n}$ を用いて次の定義をする．

定義 4.4 正数 γ と S^n 上の無限回微分可能関数 $k \in C^\infty(S^n)$ に対して，

$$\nu_\gamma(k) := \sup_{j\ge 0} \frac{1}{j!\,\gamma^j} \left\| \left(\sqrt{-\Lambda_n}\right)^j k \right\|_{L^2(S^n)} \tag{4.5}$$

とおく．

このとき，次の補題が知られている．

補題 4.5（岡本 [4]）作用素 $\sqrt{-\Lambda_n}$ は自己共役である．また，２つの量 $\mu_\gamma(k)$ と $\nu_\gamma(k)$ の間には

$$\mu_\gamma(k) \le \nu_\gamma(k) \le \sqrt{2}\,\mu_\gamma(k)$$

という大小関係が成り立つ．

命題 4.2 と補題 4.5 の後半を組み合わせると，直ちに次の系が得られる．

系 4.6 S^n 上の無限回微分可能関数 $k \in C^\infty(S^n)$ が S^n 上で実解析的となるための必要十分条件は，ある正数 γ が存在して

$$\nu_\gamma(k) < \infty \tag{4.6}$$

となることである．

第２段：補題 3.4 の証明

以上の準備の下で，補題 3.4 の証明を始めよう．$k(\theta,\varphi,\rho)$ が実解析的であるとする．このとき，任意の ρ を固定するごとに，関数 $(\theta,\varphi) \mapsto k(\theta,\varphi,\rho)$ は S^n 上の実解析的関数である．したがって，系 4.6 によって，ある正数 $C(\rho), \gamma(\rho)$ があって，$\nu_{\gamma(\rho)}(k(\cdot,\rho)) \le C(\rho) < \infty$ が成り立つ．さらに，命題 4.2 の証明をふりかえれば，上の正数 $C(\rho), \gamma(\rho)$ を ρ に関して連続関数になるようにとれることがわかる．したがって，ある定数 $b, C, \gamma > 0$ を選んで，$\rho \in \mathbb{C}, |\rho-\omega| \le b$ である限り，

$$\sup_{|\rho-\omega|\le b}\ \sup_{j\ge 0} \frac{1}{j!\,\gamma^j} \left\| \left(\sqrt{-\Lambda_n}\right)^j k \right\|_{L^2(S^n)} \le C\omega_n^{1/2} \tag{4.7}$$

が成り立つとしてよい．ここで，ω_n は S^n の n 次元体積である．

さて，第１段の準備と (4.7) から，$0 < \alpha < \gamma^{-1}$ となるような任意の α に対して，次の不等式が成り立つことがわかる．

$$\begin{aligned} &\exp\left(\alpha\lambda_{l_1}^{1/2}\right) \left|(k(\cdot,\rho), Y_{l,m})_{L^2(S^n)}\right| \\ =&\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\alpha^j \lambda_{l_1}^{j/2} \left|(k(\cdot,\rho), Y_{l,m})_{L^2(S^n)}\right| \\ =&\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\alpha^j \left|\left(k(\cdot,\rho), \lambda_{l_1}^{j/2} Y_{l,m}\right)_{L^2(S^n)}\right| \\ =&\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\alpha^j \left|\left(k(\cdot,\rho), \left(\sqrt{-\Lambda_n}\right)^j Y_{l,m}\right)_{L^2(S^n)}\right| \\ =&\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\alpha^j \left|\left(\left(\sqrt{-\Lambda_n}\right)^j k(\cdot,\rho), Y_{l,m}\right)_{L^2(S^n)}\right| \\ \le&\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\alpha^j \left\|\left(\sqrt{-\Lambda_n}\right)^j k(\cdot,\rho)\right\|_{L^2(S^n)} \|Y_{l,m}\|_{L^2(S^n)} \\ =&\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\alpha^j \left\|\left(\sqrt{-\Lambda_n}\right)^j k(\cdot,\rho)\right\|_{L^2(S^n)} \\ \le&\nu_\gamma(k(\cdot,\rho)) \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha\gamma)^j \le C\omega_n^{1/2}(1-\alpha\gamma)^{-1}. \end{aligned}$$

上の不等式から，展開係数についての，次のような指数的**減衰**評価が得られる：

$$\begin{aligned} &\sup_{|\rho-\omega|\le b} \left|(k(\cdot,\rho), Y_{l,m})_{L^2(S^n)}\right| \\ \le& C\omega_n^{1/2}(1-\alpha\gamma)^{-1}\exp\left(-\alpha\lambda_{l_1}^{1/2}\right). \end{aligned} \tag{4.8}$$

他方，さらに $0 < a < \alpha$ となるような任意の a をとると，$(r,\theta,\varphi) \in A_a^*$ かつ $\rho \in B_b$ のとき，A_a^* の定義 (3.11) から

$$d\left(\theta, [0,\pi]^{n-1}\right) + |\mathrm{Im}\varphi| < a - |r-1|$$

である．したがって，我々の**定理 1.3 から**，任意の

非負整数 l_1 に対して

$$\sum_{(l',\,m)\in D_{l_1}^{(n-1)}} |Y_{l,\,m}(\theta,\,\varphi)|^2 \le \frac{h_{l_1}(n)}{\omega_n} \exp\left(2(a-|r-1|)\lambda_{l_1}^{1/2}\right) \tag{4.9}$$

が成り立つ．

上の 2 つの不等式 (4.8) と (4.9) を用いて，(3.8) の右辺の級数を評価しよう．

$$\begin{aligned}
&|k^*(r,\,\theta,\,\varphi,\,\rho)| \\
&=\left|\sum_{(l,\,m)} (k(\cdot\,,\,\rho),\,Y_{l,\,m})_{L^2(S^n)}\; r^{l_1}\,Y_{l,\,m}(\theta,\,\varphi)\right| \\
&\le \sum_{(l,\,m)} \left|(k(\cdot\,,\,\rho),\,Y_{l,\,m})_{L^2(S^n)}\; r^{l_1}\,Y_{l,\,m}(\theta,\,\varphi)\right| \\
&\le \sum_{(l,\,m)} \left|(k(\cdot\,,\,\rho),\,Y_{l,\,m})_{L^2(S^n)}\right| \\
&\quad\times (1+|r-1|)^{l_1}\,|Y_{l,\,m}(\theta,\,\varphi)| \\
&= \sum_{(l,\,m)} \left|(k(\cdot\,,\,\rho),\,Y_{l,\,m})_{L^2(S^n)}\right| \\
&\quad\times \left(\sum_{j=0}^{l_1}\binom{l_1}{j}|r-1|^j\right) |Y_{l,\,m}(\theta,\,\varphi)| \\
&= \sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{(l',\,m)\in D_{l_1}^{(n-1)}} \left|(k(\cdot\,,\,\rho),\,Y_{l,\,m})_{L^2(S^n)}\right| \\
&\qquad\times |Y_{l,\,m}(\theta,\,\varphi)| \\
&\quad+\sum_{l_1=1}^{\infty}\sum_{(l',\,m)\in D_{l_1}^{(n-1)}} \left|(k(\cdot\,,\,\rho),\,Y_{l,\,m})_{L^2(S^n)}\right| \\
&\quad\times \left(\sum_{j=1}^{l_1}\binom{l_1}{j}|r-1|^j\right) |Y_{l,\,m}(\theta,\,\varphi)|\,.
\end{aligned}$$

この右辺の第 2 の和において，l_1 に関する和と j に関する和の順序を交換すると，

$$\sum_{l_1=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{l_1} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l_1=j}^{\infty}$$

である．この和の順序交換を行ったのちに，$(l',\,m)$ に関する積和をシュワルツの不等式を用いて和の積の形で評価すれば，上の 2 つの不等式 (4.8) と (4.9) を適用できる形になる．以上を実行して上の 2 つの不等式を用いると，上の式の右辺はさらに次のように評価される．

$$\begin{aligned}
&\sum_{l_1=0}^{\infty}\sum_{(l',\,m)\in D_{l_1}^{(n-1)}} \left|(k(\cdot\,,\,\rho),\,Y_{l,\,m})_{L^2(S^n)}\right| \\
&\qquad\times |Y_{l,\,m}(\theta,\,\varphi)| \\
&\quad+\sum_{j=1}^{\infty}|r-1|^j\sum_{l_1=j}^{\infty}\binom{l_1}{j} \\
&\quad\times \sum_{(l',\,m)\in D_{l_1}^{(n-1)}} \left|(k(\cdot\,,\,\rho),\,Y_{l,\,m})_{L^2(S^n)}\right| |Y_{l,\,m}(\theta,\,\varphi)| \\
&\le \sum_{l_1=0}^{\infty}\left(\sum_{(l',\,m)\in D_{l_1}^{(n-1)}} \left|(k(\cdot\,,\,\rho),\,Y_{l,\,m})_{L^2(S^n)}\right|^2\right)^{1/2} \\
&\quad\times \left(\sum_{(l',\,m)\in D_{l_1}^{(n-1)}} |Y_{l,\,m}(\theta,\,\varphi)|^2\right)^{1/2} \\
&\quad+\sum_{j=1}^{\infty}|r-1|^j\sum_{l_1=j}^{\infty}\binom{l_1}{j} \\
&\quad\times \left(\sum_{(l',\,m)\in D_{l_1}^{(n-1)}} \left|(k(\cdot\,,\,\rho),\,Y_{l,\,m})_{L^2(S^n)}\right|^2\right)^{1/2} \\
&\quad\times \left(\sum_{(l',\,m)\in D_{l_1}^{(n-1)}} |Y_{l,\,m}(\theta,\,\varphi)|^2\right)^{1/2} \\
&\le \sum_{l_1=0}^{\infty}\left(\sum_{(l',\,m)\in D_{l_1}^{(n-1)}} \left(\frac{C\omega_n^{1/2}}{1-\alpha\gamma}\exp\left(-\alpha\lambda_{l_1}^{1/2}\right)\right)^2\right)^{1/2} \\
&\quad\times \frac{h_{l_1}(n)^{1/2}}{\omega_n^{1/2}}\exp\left((a-|r-1|)\lambda_{l_1}^{1/2}\right) \\
&\quad+\sum_{j=1}^{\infty}|r-1|^j\sum_{l_1=j}^{\infty}\binom{l_1}{j} \\
&\quad\times \left(\sum_{(l',\,m)\in D_{l_1}^{(n-1)}} \left(\frac{C\omega_n^{1/2}}{1-\alpha\gamma}\exp\left(-\alpha\lambda_{l_1}^{1/2}\right)\right)^2\right)^{1/2} \\
&\quad\times \frac{h_{l_1}(n)^{1/2}}{\omega_n^{1/2}}\exp\left((a-|r-1|)\lambda_{l_1}^{1/2}\right) \\
&\le \frac{C}{1-\alpha\gamma}\sum_{l_1=0}^{\infty}h_{l_1}(n)\exp\left(-(\alpha-a+|r-1|)\lambda_{l_1}^{1/2}\right) \\
&\quad+\frac{C}{1-\alpha\gamma}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{|r-1|^j}{j!} \\
&\quad\times \sum_{l_1=j}^{\infty}l_1^j\,h_{l_1}(n)\exp\left(-(\alpha-a+|r-1|)\lambda_{l_1}^{1/2}\right).
\end{aligned} \tag{4.10}$$

ただし，この最後の不等式において

$$\binom{l_1}{j} = \frac{l_1!}{j!(l_1-j)!} = \frac{(l_1-j+1)_j}{j!} \le \frac{l_1^j}{j!}$$

および

$$\sum_{(l',m)\in D_{l_1}^{(n-1)}} 1^2 = \sharp D_{l_1}^{(n-1)} = \dim P_{l_1}(S^n) = h_{l_1}(n)$$

であることを用いた．

ここで (1.5) から，$l_1 \ge 1$ のとき

$$\begin{aligned} &h_{l_1}(n) = \dim P_{l_1}(S^n) \\ =&\binom{l_1+n}{n} - \binom{l_1+n-2}{n} \\ =&\frac{1}{n!}\left\{(l_1+1)_n - (l_1-1)_n\right\} \\ =&\frac{1}{(n-1)!}(l_1+1)_{n-2}(2l_1+n-1) \\ \le&\frac{1}{(n-1)!}(2l_1)(3l_1)\cdots((n-1)l_1)((n+1)l_1) \\ =&(n+1)\,l_1^{n-1} \end{aligned} \tag{4.11}$$

であるから，(4.11) と $h_0(n)=1$ と合わせて，(4.10) から次の不等式が得られる：

$$\begin{aligned} &|k^*(r,\theta,\varphi,\rho)| \\ \le&\sum_{(l,m)} \left|(k(\cdot,\rho), Y_{l,m})_{L^2(S^n)}\right| \\ &\times (1+|r-1|)^{l_1} |Y_{l,m}(\theta,\varphi)| \\ \le&\frac{(n+1)C}{1-\alpha\gamma}\left(1+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{|r-1|^j}{j!}\sum_{l_1=j}^{\infty} l_1^{n-1+j}\right. \\ &\left.\times \exp\left(-(\alpha-a+|r-1|)\lambda_{l_1}^{1/2}\right)\right). \end{aligned} \tag{4.12}$$

この (4.12) の右辺を評価するために，$\mathrm{Re}\, z>0$ で収束する正則関数

$$F(z) = \sum_{l_1=0}^{\infty} e^{-l_1 z} = \frac{1}{1-e^{-z}}$$

を導入する．$x>0$ のとき，Cauchy の積分公式

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-x|=(1-\delta)x} \frac{F(z)}{z-x}\,dz \tag{4.13}$$

が成り立つ．ただし，定数 δ は次のようにとる：

$$1-\delta = \frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{\alpha}\right) > 0. \tag{4.14}$$

(4.13) を積分記号下で x について $n-1+j$ 回微分すると，$F^{(n-1+j)}(x)$ の表示式

$$\begin{aligned} &F^{(n-1+j)}(x) \\ =&\frac{(n-1+j)!}{2\pi i}\int_{|z-x|=(1-\delta)x} \frac{F(z)}{(z-x)^{n+j}}\,dz \end{aligned} \tag{4.15}$$

が得られる．これより，$x>0$ のとき，$j=0$ の場合も含めて次の不等式が成り立つ：

$$\begin{aligned} &\sum_{l_1=j}^{\infty} l_1^{n-1+j}\exp\left(-x\lambda_{l_1}^{1/2}\right) \\ \le&\sum_{l_1=1}^{\infty} l_1^{n-1+j}\exp(-xl_1) \\ =&(-1)^{n-1+j}\sum_{l_1=1}^{\infty}(-l_1)^{n-1+j}\exp(-xl_1) \\ =&(-1)^{n-1+j}F^{(n-1+j)}(x) = |F^{(n-1+j)}(x)| \\ \le&\frac{(n-1+j)!}{2\pi}\int_{|z-x|=(1-\delta)x}\frac{|F(z)|}{|z-x|^{n+j}}|dz| \\ \le&\frac{(n-1+j)!}{\{(1-\delta)x\}^{n-1+j}}\frac{1}{1-e^{-\delta x}} \\ \le&\frac{(n-1+j)!}{\{(1-\delta)x\}^{n-1+j}}\frac{e^x}{\delta x}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

この不等式 (4.16) を $x=\alpha-a+|r-1|$ として使うと，(4.12) の右辺の定数倍を除いた部分は

$$\begin{aligned} &1+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{|r-1|^j}{j!}\sum_{l_1=j}^{\infty} l_1^{n-1+j}\exp\left(-x\lambda_{l_1}^{1/2}\right) \\ \le&1+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{|r-1|^j}{j!}\frac{(n-1+j)!}{\{(1-\delta)x\}^{n-1+j}}\frac{e^x}{\delta x} \\ =&1+\frac{e^x}{\delta x}\{(1-\delta)x\}^{-(n-1)} \\ &\times\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(n-1+j)!}{j!}\left(\frac{|r-1|}{(1-\delta)x}\right)^j \\ =&1+\frac{e^x}{\delta x}\{(1-\delta)x\}^{-(n-1)} \\ &\times\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1}\sum_{j=0}^{\infty} t^{n-1+j}\Bigg|_{t=\frac{|r-1|}{(1-\delta)x}} \end{aligned} \tag{4.17}$$

と評価される．ここで，

$$G(t) = \sum_{j=0}^{\infty} t^{n-1+j} = \frac{t^{n-1}}{1-t}$$

は $|t|<1$ において正則であるから，その $n-1$ 階微分

$$G^{(n-1)}(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1}\sum_{j=0}^{\infty} t^{n-1+j}$$

も $|t|<1$ において正則である．さらに，

$$t=\frac{|r-1|}{(1-\delta)x}=\frac{|r-1|}{(1-\delta)(\alpha-a+|r-1|)}$$

を $|r-1|$ の1次分数関数とみると，

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{1-\delta}\,\frac{|r-1|}{\alpha-a+|r-1|} \\ &= \frac{1}{1-\delta}\left(1-\frac{\alpha-a}{\alpha-a+|r-1|}\right) \end{aligned}$$

であるから，$|r-1|\geq 0$ においてこれは増加する．さらに，$(r,\,\theta,\,\varphi)\in A_a^*$ だから，

$$|r-1|\leq |r-1|+d\left(\theta,\,[0,\,\pi]^{n-1}\right)+|\mathrm{Im}\varphi|<a$$

がいえ，これと δ の定義 (4.14) より，t の値域は次の不等式の範囲に含まれることがいえる：

$$\begin{aligned} 0\leq t &< \frac{1}{1-\delta}\left(1-\frac{\alpha-a}{\alpha-a+a}\right) \\ &= \left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{\alpha}\right)\right]^{-1}\frac{a}{\alpha} \\ &= \frac{2\alpha}{\alpha+a}\,\frac{a}{\alpha}=\frac{2a}{\alpha+a}\ (<1). \end{aligned} \tag{4.18}$$

これらの不等式 (4.17) と (4.18) を (4.12) の右辺に用いると，最終的に次の評価を得る：

$$\begin{aligned} &|k^*(r,\,\theta,\,\varphi,\,\rho)| \\ \leq &\sum_{(l,\,m)}\left|(k(\cdot\,,\,\rho),\,Y_{l,\,m})_{L^2(S^n)}\right| \\ &\times(1+|r-1|)^{l_1}\,|Y_{l,\,m}(\theta,\,\varphi)| \\ \leq &\frac{(n+1)C}{1-\alpha\gamma} \\ &\times\left(1+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{|r-1|^j}{j!}\sum_{l_1=j}^{\infty}l_1^{n-1+j}\exp\left(-x\lambda_{l_1}^{1/2}\right)\right) \\ \leq &\frac{(n+1)C}{1-\alpha\gamma}\left[1+\frac{e^x}{\delta x}\{(1-\delta)x\}^{-(n-1)}\right. \\ &\left.\times\sup_{|t|\leq 2a/(\alpha+a)}\left|G^{(n-1)}(t)\right|\right] \\ \leq &\frac{(n+1)C}{1-\alpha\gamma}\left[1+\frac{e^\alpha}{\delta(\alpha-a)}\{(1-\delta)(\alpha-a)\}^{-(n-1)}\right. \\ &\left.\times\sup_{|t|\leq 2a/(\alpha+a)}\left|G^{(n-1)}(t)\right|\right]. \end{aligned} \tag{4.19}$$

この (4.19) の右辺は有限値であるから，この不等式は，調和拡張 k^* を与える (3.8) の右辺の級数が，複素近傍 $X_{a,\,b}^*$ において，一様に絶対収束することを示している．したがって，補題 3.4 が証明された．（証明おわり）

参考文献

[1] Andrews, E., Askey, R. and Roy, R., *Special Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[2] 伊藤清三，小松彦三郎（編），解析学の基礎，岩波書店，1977.

[3] Kametani, M., A higher-dimensional analogy of the Siegel-Moser theory in an annulus, *in preparation.*

[4] 岡本清郷，等質空間上の解析学，紀伊國屋書店，1980.

[5] 小野孝，ガウスの和　ポワンカレの和，日本評論社，2008.

[6] Siegel, C. L. and Moser, J. K., *Lectures on Celestial Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1971.

[7] 竹内勝，現代の球関数，岩波書店，1975.

[8] 吉田耕作，微分方程式の解法　第2版，岩波書店，1978.

（2011．1．7 受付）

AN EXPONENTIAL GROWTH ESTIMATE FOR SPHERICAL FUNCTIONS IN A COMPLEX NEIGHBORHOOD OF THE UNIT SPHERE

Makoto KAMETANI

ABSTRACT: We show an exponential growth estimate for the standard orthonormal basis $\{Y_{l,m}\}$ of the space of spherical functioins in a complex neighborhood of the unit sphere S^n. This estimate is a higher-dimensional version of the well-known estimate $|Y_m(\varphi)|^2+|Y_{-m}(\varphi)|^2 \leq \pi^{-1}\exp(2|m||\mathrm{Im}\,\varphi|)$ in a complex neighborhood of the unit circle S^1 for the standard orthonormal basis $\{Y_m(\varphi)=(2\pi)^{-1/2}e^{im\varphi}\}$ of the Fourier series on S^1. In the section 1, we state the estimate for $\{Y_{l,m}\}$, and we prove it by the addition theorem for the Gegenbauer polynomials in the section 2. We also announce the main result (a higher-dimensional analogy of the Siegel-Moser theory in an annulus) of our paper in preparation, which motivates our estimate for $\{Y_{l,m}\}$. In the last section 4, we give a proof of a lemma (analyticity of harmonic extensions of real analytic functions) on which the announced paper is based, as an application of the exponential growth estimate shown in the section 2.

Key Words: *Spherical functions, Exponential growth estimate, Gegenbauer polynomials, Addition theorem*