

# コースティックス法による 木質材料の応力拡大係数の測定

生水 雅之<sup>1</sup>・後藤 昌英<sup>2</sup>・広瀬 幸雄<sup>3</sup>

要旨：コースティックス法は、応力拡大係数を決定する上で有力な実験的手法である。しかし、木材の場合、表面の凹凸のためコースティック像を鮮明に得ることができない。本研究では、モード I 荷重下の直交異方性ヒノキ材に対して皮膜法を用いてコースティックス法の適用を検討した。さらにコースティック像を直接シミュレーションすることのできる3次元有限要素法に基づいた数値解析手法を提案した。その結果、本研究で得られた最小の初期曲線 $r_0^{\text{min}}$ は等方性材の場合と比較すると小さくなり、実験像とシミュレーション結果はほぼ一致することが認められた。

キーワード：コースティックス法、木質材料、応力拡大係数、有限要素解析、初期曲線、皮膜法、三次元応力場

## 1. はじめに

木材を土木・建築用の構造部材として用いる場合、他の部材との接合部を継手や仕口と称されるはめあい構造とすることが多く見られ、そこには多くの切欠きが存在し、部材の破壊はしばしばこの応力集中部から発生する<sup>(1)</sup>。一般に木材を構成する組織や細胞の形状・配列には一定の方向性があり、力学的異方性を示すことが知られている。その際、繊維方向(軸方向, L)、接線方向(T)および半径方向(放射方向, R)のそれぞれが互いに直交する直交異方性材として取扱うことが可能である<sup>(1), (2)</sup>。本研究では、表面反射型コースティックス法を乾燥ヒノキ材に適用し、モード I 型荷重下における応力拡大係数  $K_1$  の実験的決定に関する基礎的な検討を行った。その際、切欠き先端近傍の応力・変位場を三次元有限要素法(3D-FEM)を用いて解析し、ラグランジュ補間法によりコースティック像の直接シミュレーションを行い、得られた実験像との比較・検討を行った。この数値解析手法は、像の大きさを決定する上で測定精度向上の一助となるだけでなく、コースティック像の予測または実験結果の解析に対しても有効であると考えられる<sup>(3)</sup>。

## 2. 直交異方性材に対する表面反射型コースティックス法の基礎理論<sup>(4)</sup>

切欠きを有する試験片に負荷を与え、光を入射させたとき、切欠き先端近傍において光が受ける偏りベクトル $\vec{w}$ は、試験片とスクリーンとの距離を  $z_0$  とすると、次式で表すことができる。

$$\vec{w} = z_0 \text{grad}(\Delta t) = z_0 t \text{grad}(\varepsilon_z) \quad (1)$$

ここで、 $t$  は板厚を示し  $\varepsilon_z$  は試験片板厚方向のひずみである。平面応力状態における  $\varepsilon_z$  は、次式で示すことができる。

$$\varepsilon_z = a_{31}\sigma_x + a_{32}\sigma_y + a_{36}\tau_{xy} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} a_{31} &= -\left( \frac{\nu_{23}}{E_2} m^2 + \frac{\nu_{13}}{E_1} l^2 \right) \\ a_{32} &= -\left( \frac{\nu_{23}}{E_2} l^2 + \frac{\nu_{13}}{E_1} m^2 \right) \\ a_{36} &= 2 \left( \frac{\nu_{13}}{E_1} - \frac{\nu_{23}}{E_2} \right) lm \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで、 $a_{ij}$  は直交異方性材の弾性コンプライアンスを示し、 $E$ ,  $\nu$  はヤング率、ポアソン比である。 $l$ ,  $m$  は材料の主軸が水平方向と反時計回りになす角度を  $\beta$  として、 $l = \cos \beta$ ,  $m = \sin \beta$  で示される。モード I 型負荷の場合、き裂先端の応力分布は、次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \text{Re} \left[ \frac{s_1 s_2}{s_1 - s_2} \left\{ \frac{s_2}{(\cos \theta + s_2 \sin \theta)^{1/2}} - \frac{s_1}{(\cos \theta + s_1 \sin \theta)^{1/2}} \right\} \right] \\ \sigma_y &= \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \text{Re} \left[ \frac{1}{s_1 - s_2} \left\{ \frac{s_1}{(\cos \theta + s_2 \sin \theta)^{1/2}} - \frac{s_2}{(\cos \theta + s_1 \sin \theta)^{1/2}} \right\} \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \text{Re} \left[ \frac{s_1 s_2}{s_1 - s_2} \left\{ \frac{1}{(\cos \theta + s_1 \sin \theta)^{1/2}} - \frac{1}{(\cos \theta + s_2 \sin \theta)^{1/2}} \right\} \right] \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

1 舞鶴工業高等専門学校 機械工学科 教授  
2 金沢大学ベンチャービジネスラボラトリー 講師  
3 金沢大学大学院自然科学研究科 特任教授

ここで,  $K$  はモード I 型の応力拡大係数を示し,  $s_1, s_2$  は式(5)に示す特性方程式の根である.

$$a_{22} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 2a_{26} \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} + (2a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} - 2a_{16} \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3} + a_{11} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0 \quad (5)$$

式(2), (4)を式(1)に代入することにより, スクリーン上の光の位置  $\vec{W}$  は次式で示される.

$$\begin{aligned} \vec{W} &= \lambda_m \vec{F} + \vec{W} \\ &= \lambda_m \left[ \left\{ r \cos \theta + C \cdot K \cdot r^{-3/2} \cdot g_1(\theta) \right\} \vec{e}_x \right. \\ &\quad \left. + \left\{ r \sin \theta + C \cdot K \cdot r^{-3/2} \cdot g_2(\theta) \right\} \vec{e}_y \right] \\ &= x' \cdot \vec{e}_x + y' \cdot \vec{e}_y \end{aligned} \quad (6)$$

ここで,  $\vec{F}$  は入射光の位置ベクトルを示し,  $\vec{e}_x, \vec{e}_y$  は  $x, y$  方向の単位ベクトルであり,  $g_{1,2}(\theta)$  は弾性コンプライアンスと  $\theta$  より求まる定数である. また  $\lambda_m$  および  $C$  は, 次式で示される.

$$\lambda_m = \frac{z_0 - z_i}{z_i}, \quad C = \frac{z_0 \cdot t}{2\sqrt{2\pi} \cdot \lambda_m} \quad (7)$$

コースティック像を形成する初期曲線  $r_0(\theta)$  は, 次式で与えられる.

$$r = r_0(\theta) = \left[ 3C \cdot K \cdot |c_0(\theta)|^2 \right]^{1/5} \quad (8)$$

$c_0(\theta)$  は光学定数であり, 材料の機械的性質  $g_{1,2}(\theta)$  より決定できる. また,  $r_0(\theta)$  は等方性材の場合, 切欠き先端を中心とした円周上を示すことになるが, 本材の場合  $\theta$  の関数となり, 材料の弾性コンプライアンスにより変化する. また, スクリーン上のコースティック像の形状  $(X, Y)$  は, 式(6)より次式で示される.

$$\begin{aligned} X &= \lambda_m \cdot r_0(\theta) \left[ \cos \theta + \frac{1}{3} |c_0(\theta)|^{-1} g_1(\theta) \right] \\ Y &= \lambda_m \cdot r_0(\theta) \left[ \sin \theta + \frac{1}{3} |c_0(\theta)|^{-1} g_2(\theta) \right] \end{aligned} \quad (9)$$

ここで, 像の切欠きに対し垂直方向の大きさを  $D_t^{\max}$ , また  $D_t^{\max}$  を示す  $\theta$  の値を  $\theta_t^{\max}$ , さらにその時の初期曲線  $r_0(\theta_t^{\max})$  を  $r_0$  とすると, 次式が成り立つ.

$$D_t^{\max} = \lambda_m \cdot r_0 \cdot \delta(\theta_t^{\max}) \quad (10)$$

$\delta(\theta_t^{\max})$  は,  $c_0(\theta_t^{\max})$  と  $g_2(\theta)$  より求まる定数であり, 特に等方性材の場合  $\delta(\theta_t^{\max})=3.17$  の関係が成り立つ. 式(10)に式(8)を代入することにより, 最終的に実験的応力拡大係数  $K_{\text{exp}}$  は, 次式により決定で

きる.

$$K_{\text{exp}} = \frac{2\sqrt{2\pi}}{3 \cdot z_0 \cdot t \cdot |c_0(\theta_t^{\max})|} \left( \frac{1}{\lambda_m} \right)^2 \left\{ \frac{D_t^{\max}}{d(\theta_t^{\max})} \right\}^2 \quad (11)$$

### 3. 実験方法

#### 3.1 試験片

用いた材料は丹州産ヒノキの乾燥材であり, 試験片加工後の平均含水率は約 16%であった. 引張試験は木材の JIS 規格<sup>(5)</sup>に準拠し, 荷重方向と繊維方向 (L) とが平行, 垂直および 45° 方向に対して縦および横引張試験を実施した. Fig.1 に木材の座標系および各面の名称を, Table I に得られた弾性定数をまとめて示す. ここで  $E, G$  および  $\nu$  は, ヤング率, せん断弾性係数およびポアソン比である. また, コースティック法の実験試験片は, 荷重軸方向を Fig.1 に示す L, R および T の 3 方向に一致させた 125×30×5 (長・幅・厚) mm の短冊型試験片を 3 種類採取した. 試験片表面には明瞭なコースティック像を得るために, 速乾性ポリエステル樹脂 (厚さ約 0.05 mm) をコーティングし, その後長さ  $a=9$  mm の切欠き (切欠き比  $a/w=0.3$ , 曲率半径  $\rho=0.10 \pm 0.02$  mm) を高速切断機 (刃厚 0.3 mm) にて導入し, 最後に金蒸着を施し実験に供した. 皮膜を用いた場合のコースティック法の感度  $\alpha$  は, 皮膜がない場合の光学定数  $c_0$  と皮膜がある場合の光学定数  $c_0^c$  を用いて, 次式で示される<sup>(6)</sup>.

$$\alpha = \frac{c_0^c}{c_0} = \frac{2(1-\nu_m) \nu_p t_p}{(1-\nu_p) \nu_m t_m} + 1 \quad (12)$$

ここで,  $t, \nu$  は板厚, ポアソン比であり, 下添字  $m, p$  は母材, 皮膜材を示している.

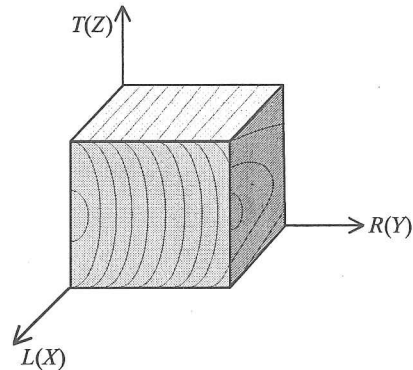


Fig.1 Coordinate system.

Table 1 Elastic constant of Wood. (E,G: GPa)

#### 3.2 実験装置

$E_L$	13.9	$E_R$	1.21	$E_T$	0.72
$G_{LR}$	1.12	$G_{LT}$	0.68	$G_{RT}$	0.17
$\nu_{LR}$	0.46	$\nu_{LT}$	0.51	$\nu_{RT}$	0.77

Fig.2に実験装置を示す。光源として出力2mWのHe-Neガスレーザを用いた。光はコリメータで平行光となり、その後両凸レンズで収束光となり試験片に入射する。入射光は引張負荷のかかった試験片表面で反射し、スクリーン上にコースティック像を形成する。なお、本研究においては試験片とスクリーンとの距離  $z_0=800\text{mm}$  の一定条件下で、負荷応力  $s=1.2\sim 3.8\text{MPa}$ 、試験片と光の焦点との距離  $z_i=50\sim 300\text{mm}$  の範囲で変化させ、実験像の測定を行った。

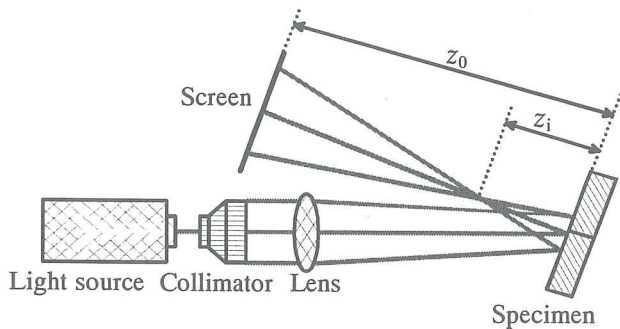


Fig.2 Schematic illustration of optical equipment.

#### 4. コースティック像のシミュレーション

##### 4.1 解析条件

Fig.3に切欠き部付近の要素分割図を示す。20節点アイソパラメトリック6面体要素にて要素寸法は切欠き部に近づくにつれて密になるような形状とし、切欠き前縁部においては中間節点を1/4の点に移動させた15節点アイソパラメトリック5面体特異要素とした<sup>(7)</sup>。また要素分割は板厚を考慮し、実際の試験片の1/2領域を対象モデルとして解析を行った。その際の要素数23100、節点数30200、最小要素寸法  $0.02a$  ( $a=9\text{mm}$ )である。

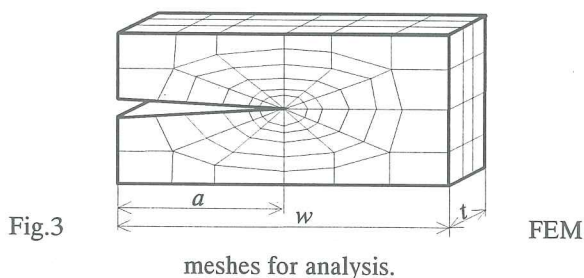


Fig.3

##### 4.2 数値解析法

シミュレーションを行うためには、光の偏りベクトル  $\vec{w}$  を求める必要がある。  $w$  は切欠き先端の面外変位  $u_z$ 、  $z_0$  を用い、次式のように表すことができる。

$$\vec{w} = 2z_0 \text{grad}(u_z) \quad (13)$$

すなわち  $u_z$  を求めることによりスクリーン上での光の位置を知ることができる。本研究では、まず節点

の位置  $(x_i, y_j)$  における面外変位  $u_z(x_i, y_j)$  の  $x$  方向の勾配  $G_x$  および  $y$  方向の勾配  $G_y$  をラグランジュ補間法の考え方にに基づき、式(14)~(15)により導出する。

$$G_x = \sum_{m=-2}^2 (1-\delta_{m0}) u(x_{i+m}, y_j) \frac{\prod_{k=-2}^2 [x_i - x_{i+k} - \delta_{km}(x_i - x_{i+k} - 1) + \delta_{k0}]}{\prod_{k=-2}^2 (x_{i+m} - x_{i+k} + \delta_{km})} + u(x_i, y_j) \frac{\sum_{n=-2}^2 (1-\delta_{n0}) \prod_{k=-2}^2 [x_i - x_{i+k} - d_{kn}(x_i - x_{i+k} - 1) + d_{k0}]}{\prod_{k=-2}^2 (x_i - x_{i+k} + d_{k0})} \quad (14)$$

$$G_y = \sum_{m=-2}^2 (1-\delta_{m0}) u(x_i, y_{j+m}) \frac{\prod_{k=-2}^2 [y_j - y_{j+k} - \delta_{km}(y_j - y_{j+k} - 1) + \delta_{k0}]}{\prod_{k=-2}^2 (y_{j+m} - y_{j+k} + \delta_{km})} + u(x_i, y_j) \frac{\sum_{n=-2}^2 (1-\delta_{n0}) \prod_{k=-2}^2 [y_j - y_{j+k} - \delta_{kn}(y_j - y_{j+k} - 1) + \delta_{k0}]}{\prod_{k=-2}^2 (y_j - y_{j+k} + \delta_{k0})} \quad (15)$$

ここで、  $\delta_{ij}$  はクロネッカーデルタである。次に光の反射・屈折の原理に基づく数値処理を行い、コースティック像のシミュレーションを行った。最終的にスクリーン上に形成される光の位置  $(W_x, W_y)$  は光の倍率  $\lambda_m$  を用いて、次式のように決定することができる。

$$\left. \begin{aligned} W_x &= \lambda_m x + 2z_0 G_x \\ W_y &= \lambda_m y + 2z_0 G_y \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

#### 5. 実験結果および考察

Fig.4に木材繊維方向(L)と荷重軸方向を一致させた試験片を用い、  $s=2.6\text{MPa}$ 、  $z_0=800\text{mm}$  の一定条件下で得られた実験像と3D-FEMによるシミュレーション像の一例を示す。なお、実験像は3D-FEM像との相互比較が行えるように皮膜法に基づく像の縮小処理を施してある。図中シミュレーション像において、像の包絡線を明瞭に確認することができる。他方、実験像では試験片表面に皮膜を施しているため、像の包絡線が識別可能な状態で得られていることがわかる。一般に木材は繊維組織による表面の微小な凹凸のため蒸着のみでコースティック像を得ることは困難であるが、本研究で試みた皮膜を用いることにより像を得ることが可能となる。ここで像の垂直方向の最大直径を二本の実線の間隔で示す。最大直径を示す位置は、像の頭頂部より若干時計回りの方向に傾いて表れていることが認められる。しかし切欠き上下面付近で両者の像の形状は一致しておらず、

また実験像はわずかに上下非対称になっていることも認められる。この原因として切欠き先端部の皮膜厚さが局所的に異なっており、 $z_i$ が大きくなるとその影響領域が拡大されること、さらには皮膜厚さ内部に生じるひずみ勾配の影響の二つが複合的に作用し、実験像の局所的なひずみとなって表れているものと考えられる。このことはコースティック像の垂直方向の最大直径より応力拡大係数を算出する場合、精度に及ばず影響は僅少であると考えられるが、精度を議論する上では重要な問題であり、今後の検討

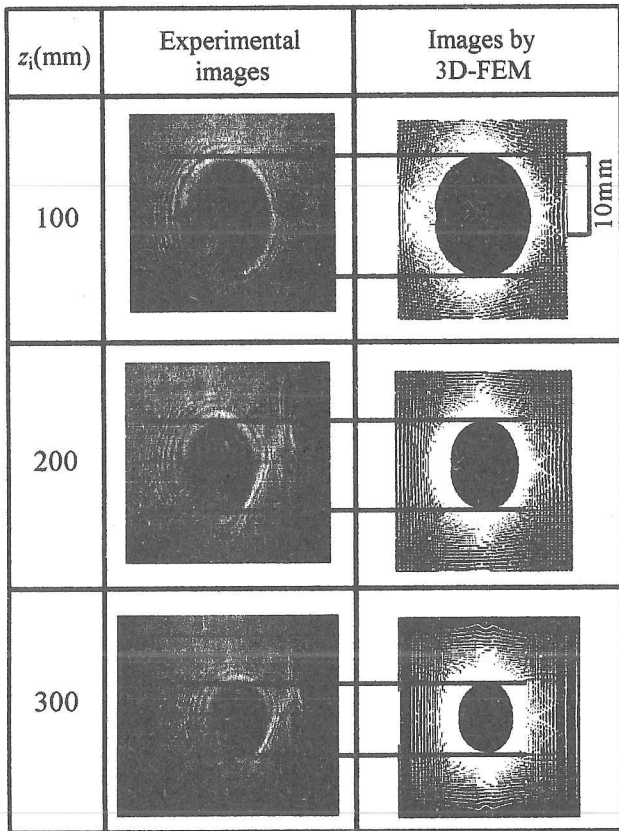


Fig.4 Experimental and 3D-FEM forms of caustic images.

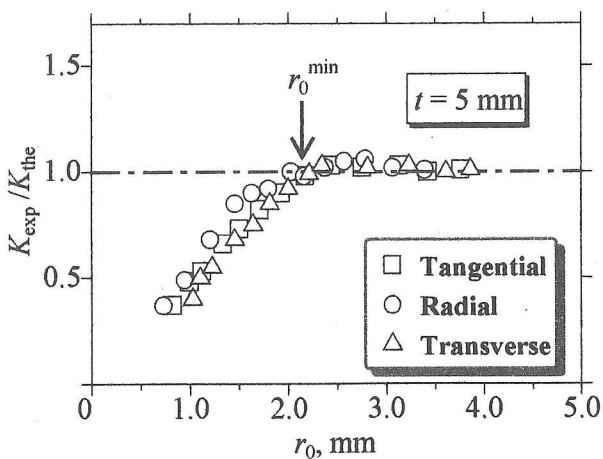


Fig.5 Relation between  $r_0$  and  $K_{exp}/K_{the}$ .

課題としたい。さらに初期曲線の大きさ $r_0 [=r_0(\theta_i^{max})]$ と応力拡大係数の理論値と実験値との比( $K_{exp}/K_{the}$ )の関係についてFig.5に示す。ここで、応力拡大係数の理論値 $K_{the}$ は結城ら<sup>(8)</sup>の境界要素法による解析結果を用いている。図中、 $K_{exp}/K_{the} \approx 1.0$ を示す最小の $r_0$ を $r_0^{min}$ とすると、その大きさは板目面、柁目面および木口面方向のいずれの試験片採取方向に対しても板厚の半分よりやや小さい値を示すことが分かる。

### 6. 結言

表面反射型コースティックス法を木質材料に適用し、モードI型負荷における応力拡大係数 $K_I$ の実験的決定に関する基礎的な検討を行った。その際、切欠き先端近傍の応力・変位場を三次元有限要素法(3D-FEM)を用いて解析し、ラグランジュ補間法によりコースティック像のシミュレーションを行い、得られた実験像との比較・検討を行い、以下の結論を得た。

- (1)本材の板目面、柁目面および木口面の三方向に対して測定時の初期曲線 $r_0$ が、本研究で得られた最小の初期曲線の大きさ $r_0^{min}$ より大きい範囲において、ほぼ正確な応力拡大係数を測定することができる。
- (2)最小の初期曲線の大きさ $r_0^{min}$ は、板目面、柁目面および木口面方向ともに試験片板厚の半分よりやや小さい値を示した。
- (3)三次元有限要素解析により、コースティック像のシミュレーションを行うとともにその数値解析手法について提示を行った。その結果、像の最大直径の大きさは初期曲線の大きさによらず実験像とほぼ一致した。

最後に本研究の一部は、平成14~15年度科学研究費補助金(基盤研究(C)(2)、課題番号:14550092)ならびに平成18年度舞鶴工業高等専門学校機械工学科内研究経費の配分を受けて行われたことを記し、関係各位に謝意を表す。

### 参考文献

- (1) 中戸莞二, 新編 木材工学, 養賢堂, 1985.
- (2) 澤田稔, 日本材料学会, 材料, 32-359, pp.838-847, 1983.
- (3) 生水雅之, 林政, 池田良, 廣瀬元, 日本材料学会, 材料, 52-12, pp.1496-1501, 2003.
- (4) M.C.Baik, S.H.Choi, J.S.Hawong and J.D. Kwon, Exp. Mech., 35, pp.137-141.1995.
- (5) JIS Z 2101, pp.35-41, 日本規格協会, 1994.
- (6) 清水紘治, 高橋賞, 非破壊検査, 40, pp.804-809, 1991.
- (7) 東郷敬一郎, 大塚昭夫, 結城良治, 日本機械学会論文集, A, 52-476, pp.909-914, 1996.
- (8) 結城良治, 許金泉, 日本機械学会論文集, A, 57-538, pp.1547-1553, 1991.

(2006. 11. 10 受付)

## MEASUREMENT OF STRESS INTENSITY FACTOR FOR WOOD BY CAUSTICS METHOD

Masayuki SHOZU, Masahide GOTOH and Yukio HIROSE

**ABSTRACT:** The experimental method of caustics is a useful technique for the determination of the stress intensity factor  $K$ . In the case of wood, however, the caustic image can be not obtained clearly because of the roughness of surface. In this study, the caustics method is examined for an orthotropic Japanese cypress material under mode I loading by using a coating technique. Furthermore, a numerical method based on the 3D finite element method (3D-FEM), which can directly simulate the caustic image, is proposed. As a result, it is found that the minimum initial curve radius  $r_0^{\min}$  obtained in this study becomes small in comparison with isotropic materials, and the simulated results are nearly in agreement with the experimental images.

**Key Words :** *Caustics method, Wood, Stress intensity factor, Finite element method, Initial curve, 3D-stress field, Numerical method*