コンパクト実解析多様体上の実解析関数に対する指数$\mu_{P,r}(f)$の有限性

亀谷　睦[1]

要旨：Mを向きづけられたコンパクトな実解析多様体とし，M上で定義された実解析係数をもつm階の偏微分作用素を$P = P(x, \partial_x)$とする．正数rおよびM上の実解析関数fに対して，指数$\mu_{P,r}(f)$を

$$\mu_{P,r}(f) := \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{1}{(mk)!\, r^{mk}} \|P^k f\|$$

と定める．ただし，$\|h\|$は関数hのM上の体積要素dvから定まるL^2ノルムを，記号$\mathbb{Z}_+$は非負整数の全体を，それぞれ表す．この論文では，rが十分小さいとき，$\mu_{P,r}(f)$が有限値になることを証明する．この定理はよく知られているようであるが，ここで与える証明は初等的であり，この証明から$\mu_{P,r}(f) < \infty$となるような正数rの具体的な表示が与えられ，その表示によってrが，fおよび微分作用素Pの係数の収束半径と，作用素の係数の収束域上での最大値ノルムのみに依ることがわかる．

キーワード：実解析関数，コンパクト実解析多様体，L^2ノルム，実解析係数をもつ偏微分作用素

1. はじめに

Mを向きづけられたn次元コンパクト実解析多様体とし，そのリーマン計量g_Mを固定して，Mをリーマン多様体とみなす．$P = P(x, \partial_x)$をM上の実解析係数をもつm階の偏微分作用素，rを正数とする．M上の実解析関数fに対して，次のように定義される指数$\mu_{P,r}(f)$を考えよう．

定義 1 指数$\mu_{P,r}(f)$を

$$\mu_{P,r}(f) := \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{1}{(mk)!\, r^{mk}} \|P^k f\|$$

で定義する．ただし，$\|h\|$はM上のL^2ノルム

$$\|h\| := \left(\int_M |h|^2 \, dv \right)^{1/2}$$

を表し，dvはMのリーマン計量から定まるM上の体積要素を表す．また，$\mathbb{Z}_+$は非負整数の全体を表す．■

この論文の目的は，次の定理を示すことである．

定理 1 Mを向きづけられたn次元コンパクト実解析多様体とし，$P = P(x, \partial_x)$をM上の実解析関数を係数とするm階の線型偏微分作用素とする．M上の任意の実解析関数fに対して，正数$r = r(P, f, n/m)$が存在して，

$$\mu_{P,r}(f) < \infty$$

が成り立つ．□

この定理 1 の内容は，よく知られているようである．たとえば，岡本[1)]の 52 ページには，多様体Mがコンパクトな実解析リーマン多様体で，作用素Pがリーマン計量から定まるM上のラプラス作用素$\Delta = \Delta_M$の場合に，次の記述がある：

> 任意の$f \in C^\infty(M)$が与えられたときfが実解析的であるための条件は或る正数rが存在して
>
> $$\mu_r(f) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{(2k)!\, r^{2k}} \|\Delta^k f\|$$
>
> が有限となることである．

ラプラス作用素は 2 階作用素であり，岡本は記号$\mathbb{N}$を非負整数全体の意味で使用しているので，この$\mu_r(f)$は我々の$\mu_{\Delta,r}(f)$に他ならない．したがって，上の主張は，$m = 2, P = \Delta$の場合に我々の定理 1 とその逆を述べていることになる．しかし岡本の本では，上の事実が言明されているだけで，その証明はどこにも見当たらない．

そこで，この論文では，定理 1 に対してその自前の証明を与える．その証明は大きく分けて 2 つの部分に別れる．第 2 節がその第 1 段に相当し，第 4 節が第 2 段に相当している．第 3 節では，第 4 節に

[1]舞鶴工業高等専門学校 自然科学部門 教授

必要な範囲に限って，多様体上の微分形式の復習を行う．

この節の残りの部分では，定理 1 の直感的な理解の助けとなるように，次の例を考えよう．

例 1 Mが単位円周$S^1 = \{e^{ix}\,;\, x \in \mathbb{R}\}$，$P = d^m/dx^m$という場合を考えよう．$S^1$上の実解析関数は，$\mathbb{R}$上の実解析関数で周期$2\pi$をもつものと自然に同一視される．この同一視の下で，$\mathbb{R}$上の実解析関数$f(x)$で周期2πをもつものを任意に与える．$f(x)$が実解析関数という仮定から，各点$x \in I := [0, 2\pi]$に対して，ある正数$\rho(x)$が存在して，開円板$U_x = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z-x| < \rho(x)\}$において$f(z)$は正則である．さらに，$U_x$と同じ中心をもつ半径$2^{-1}\rho(x)$の開円板を$V_x$とする．集合の族$\{V_x \cap \mathbb{R}\,;\, x \in I\}$は閉区間$I$の開被覆をなすので，区間$I$のコンパクト性から，$I$は有限部分開被覆$\{V_{x_i} \cap \mathbb{R}\,;\, i = 1, \cdots, N\}$をもつ．そこで

$$d := \min_i 2^{-1}\rho(x_i), \quad r := 1/d$$

とおく．このとき，次が成り立つ：

$$\mu_{P,\,r}(f) \leq \sqrt{2\pi} \sup_{|\operatorname{Im} z| \leq d} |f(z)|.$$

■

証明 1 （例 1 の証明）．まず，$|\operatorname{Im} z| \leq d$において$f(z)$が正則であることをいう．実際，$|\operatorname{Im} z| \leq d$を満たす任意の$z \in \mathbb{C}$に対して$x := \operatorname{Re} z$とおくと，$f(z)$の周期性から$x \in I$としてよく，かつ$|z - x| \leq d$である．また$x \in V_{x_i}$となる番号$i$が存在するので

$$\begin{aligned}|z - x_i| &\leq |z - x| + |x - x_i| < d + 2^{-1}\rho(x_i)\\ &\leq 2^{-1}\rho(x_i) + 2^{-1}\rho(x_i) = \rho(x_i)\end{aligned}$$

が成り立つ．ゆえに，$z \in U_{x_i}$がいえ，zはfの正則域に属することがわかる．そこで，xを中心とする半径dの円周を$C(x)$とすれば，コーシーの積分公式から

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(x)} \frac{f(z)}{z - x}\, dz$$

が，任意の$x \in I$に対して成り立つ．すると，この両辺にP^kを作用させる（積分記号下で両辺をxについてmk回微分する）と

$$(P^k f)(x) = \frac{(mk)!}{2\pi i}\int_{C(x)} \frac{f(z)}{(z - x)^{mk+1}}\, dz$$

が得られる．この表示から，評価式

$$\begin{aligned}|(P^k f)(x)| &\leq \frac{(mk)!}{2\pi}\int_{C(x)} \frac{|f(z)|}{|z - x|^{mk+1}}\, |dz|\\ &\leq (mk)!\, d^{-mk} \sup_{z \in C(x)} |f(z)|\\ &\leq (mk)!\, r^{mk} \sup_{|\operatorname{Im} z| \leq d} |f(z)|\end{aligned}$$

を得る．ただし，最後の不等式では，$r = 1/d$であることを用いた．さらに，$\operatorname{length}(\mathrm{S}^1) = 2\pi$であるから

$$\|h\| \leq \sqrt{2\pi} \sup_{x \in I} |h(x)|$$

となることに注意すれば，任意の$k \in \mathbb{Z}_+$に対して

$$\frac{1}{(mk)!\, r^{mk}} \|P^k f\| \leq \sqrt{2\pi} \sup_{|\operatorname{Im} z| \leq d} |f(z)| < \infty$$

となって，この右辺の量はkには無関係である．よって，例 1 の結論が成り立つ．□

上の例 1 が簡単だったのは 2 つの理由による．第 1 の理由は，多様体S^1が 1 つのパラメータxにより$S^1 = \{e^{ix}\,;\, x \in \mathbb{R}\}$とパラメータ表示できることであり，第 2 の理由は，作用素$P = d^m/dx^m$が定数係数であることである．

一般のn次元のコンパクトな実解析多様体Mとその上のm階の線型微分作用素Pに対して定理 1 を示すためには，Mの局所座標系$\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in A}$を使って，すなわち，各座標近傍$U_i$の点$x \in U_i$の座標$\varphi_i(x) = x^{(i)} = (x_1^{(i)}, \cdots, x_n^{(i)})$を用いて，$P$を表示する必要がある（次節の定義 4 を参照）．その際，作用素の表示には変数係数が現れるから，作用素の冪P^kの表示には係数の微分が複雑な形で含まれることになる（次節の補題 4 を参照）．よって，定数係数の場合の例 1 のように簡単に話を進めるわけにはいかない．

2. 定理 1 の証明の第 1 段

この節では，定理 1 の証明の第 1 段を与える．

2.1 コンパクト実解析多様体の定義と性質

坪井[2)]にしたがって，まず多様体の定義を書いておこう．

定義 2 位相空間Mがn次元の**実解析多様体**であるとは，Mがハウスドルフ空間であり，次のような開集合$U_i \subset M$と各U_iからn次元ユークリッド空間の開集合への同相写像$\varphi_i : U_i \longrightarrow \varphi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$からなる族$\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in A}$をもつことである：

(i) $\bigcup_{i \in A} U_i = M$,

(ii) $U_i \cap U_j \neq \emptyset$のとき

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}|_{\varphi_j(U_i \cap U_j)} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

は実解析写像である．

ここで，位相空間Mが**ハウスドルフ空間**であるとは，Mの任意の異なる 2 点$p, q \in M$, $p \neq q$が，開集合で分離されること，すなわち，$p \in U, q \in V, U \cap V = \emptyset$となる$M$の開集合$U, V$が存在することをいう．■

ところが，多様体Mがコンパクトであれば，もっと強い分離性が成り立つ（坪井[2)]）．

補題 1 Mがコンパクトな多様体であれば，Mは**正規空間**である．すなわち，任意の互いに交わらない閉集合$A, B \subset M$, $A \cap B = \emptyset$は，開集合で分離される．すなわち，$A \subset U$, $B \subset V$, $U \cap V = \emptyset$となるような開集合U, Vが存在する．　□

この補題1から，次の補題2が得られる（坪井[2]）．

補題 2 多様体Mの局所座標系を$\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in A}$とする．$M$がコンパクトであるならば，$M$の開被覆$\{V_i\}_{i \in A}$で，各$i \in A$に対して，$V_i$の閉包$\overline{V_i}$が元の$U_i$に含まれるようなものが存在する．　□

さて，実解析多様体M上の実解析関数とは次のように定義される．

定義 3 実解析多様体M上の関数$f : M \longrightarrow \mathbb{R}$が**実解析関数**であるとは，$M$の任意の局所座標系$\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in A}$に対して，合成関数$f \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i) \longrightarrow \mathbb{R}$が実解析関数となることをいう．　■

この定義3と補題2を組み合わせれば，次のことがいえる．

補題 3 コンパクト実解析多様体Mの局所座標系を$\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in A}$として，補題2のような開被覆$\{V_i\}_{i \in A}$をとる．このとき，$M$上の実解析関数$f$と各添字$i \in A$に対し，次のような正数$d^{(i)}$をとることができる：$x \in \varphi_i(\overline{V_i})$であり，$z \in \mathbb{C}^n$が各$j = 1, \cdots, n$に対し$|z_j - x_j| \le d^{(i)}$を満たせば，$z$は関数$f \circ \varphi_i^{-1}$の正則域に属する．　□

証明 2 （補題3の証明）．添字$i \in A$を固定して，ユークリッド空間の開集合$\varphi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$上の実解析関数$f^{(i)} := f \circ \varphi_i^{-1}$を考える．$f^{(i)}$が実解析関数であるから，任意の$x \in \varphi_i(\overline{V_i})$に対して，正数を成分とするベクトル$\rho(x) = (\rho_1(x), \cdots, \rho_n(x)) \in \mathbb{R}_+^n$が存在して，$n$重円板

$$D(x, \rho(x)) = \{z \in \mathbb{C}^n \,;\, |z_j - x_j| < \rho_j(x) \ (1 \le j \le n)\}$$

上で$f^{(i)}$は正則関数になる．そこで，
$W_x := D(x, 2^{-1}\rho(x)) \cap \mathbb{R}^n$とおく．$\{W_x\}_{x \in \varphi_i(\overline{V_i})}$は$\varphi_i(\overline{V_i})$の開被覆である．したがって，$\varphi_i(\overline{V_i})$がコンパクトであることから，$\varphi_i(\overline{V_i})$の有限部分開被覆$\{W_{x^{(k)}}\}_{1 \le k \le K}$が存在する．すると，

$$d_j^{(i)} := 2^{-1} \min_k \rho_j(x^{(k)}), \quad d^{(i)} := \min_j d_j^{(i)}$$

とおくとき，任意の$x \in \varphi_i(\overline{V_i})$に対して，番号$k$を$x \in W_{x^{(k)}}$と選ぶと，$|z_j - x_j| \le d^{(i)}$ $(1 \le j \le n)$を満たすような任意の$z \in \mathbb{C}^n$に対して

$$\begin{aligned}|z_j - x_j^{(k)}| &\le |z_j - x_j| + |x_j - x_j^{(k)}| \\ &< d^{(i)} + 2^{-1}\rho_j(x^{(k)}) \\ &\le 2^{-1}\rho_j(x^{(k)}) + 2^{-1}\rho_j(x^{(k)}) = \rho_j(x^{(k)})\end{aligned}$$

となる．この不等式はすべてのjについて成り立つので，$z \in D(x^{(k)}, \rho(x^{(k)}))$となって，$z$が$f^{(i)}$の正則域に属することがいえた．　□

2.2 実解析多様体上の線型微分作用素

Mをn次元のコンパクト実解析多様体とする．M上の実解析関数の全体のなす集合を$C^\omega(M)$と表す．

定義 4 線型作用素$P : C^\omega(M) \longrightarrow C^\omega(M)$が実解析関数を係数に持つ$m$階の**線型偏微分作用素**であるとは，任意の$f \in C^\omega(M)$に対して$Pf \in C^\omega(M)$が，$M$の局所座標系$\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in A}$を用いて，各座標近傍において

$$(Pf|_{U_i}) \circ \varphi_i^{-1} = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha^{(i)}(x^{(i)}) \partial_{x^{(i)}}^\alpha (f \circ \varphi_i^{-1})$$

の形に表せることをいう．ただし，

$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$は$n$重指数，

$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$はその重さ，

$\partial_{x^{(i)}}^\alpha$は偏微分作用素$\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1^{(i)}}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\dfrac{\partial}{\partial x_n^{(i)}}\right)^{\alpha_n}$

を，それぞれ表す．さらに，各係数$a_\alpha^{(i)}$はユークリッド空間の開集合$\varphi_i(U_i)$上の実解析関数である．　■

定理1の証明のためには，作用素の冪P^kの局所座標による表示が必要である．それは次の補題で与えられる．

補題 4 任意の$f \in C^\omega(M)$に対して，$P^k f \in C^\omega(M)$を，各座標近傍において

$$\begin{aligned}&(P^k f|_{U_i}) \circ \varphi_i^{-1} \\ &= \sum_{|\alpha^{(1)}| \le m} \cdots \sum_{|\alpha^{(k)}| \le m} \sum_{\beta^{(1)} \le \gamma^{(1)}} \cdots \sum_{\beta^{(k-1)} \le \gamma^{(k-1)}} \\ &\quad a_{\alpha^{(1)}}^{(i)} \binom{\gamma^{(1)}}{\beta^{(1)}} \left(\partial_{x^{(i)}}^{\beta^{(1)}} a_{\alpha^{(2)}}^{(i)}\right) \cdots \\ &\quad \times \binom{\gamma^{(k-1)}}{\beta^{(k-1)}} \left(\partial_{x^{(i)}}^{\beta^{(k-1)}} a_{\alpha^{(k)}}^{(i)}\right) \partial_{x^{(i)}}^{\gamma^{(k)}} (f \circ \varphi_i^{-1})\end{aligned}$$

と表すことができる．ただし，n重指数$\gamma^{(\nu)}$は

$$\gamma^{(1)} := \alpha^{(1)}$$

$$\gamma^{(\nu)} := \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \left(\alpha^{(\mu)} - \beta^{(\mu)}\right) + \alpha^{(\nu)} \quad (2 \le \nu \le k)$$

で与えられる．また，2つのn重指数β, γに対して，$\beta \le \gamma$とは$\beta_j \le \gamma_j$ $(1 \le j \le n)$を意味する．さらにまた，$\beta \le \gamma$のとき，2項係数を

$$\binom{\gamma}{\beta} := \prod_{j=1}^{n} \binom{\gamma_j}{\beta_j} = \prod_{j=1}^{n} \frac{\gamma_j!}{\beta_j!\,(\gamma_j - \beta_j)!}$$

で定める． □

証明 3 （補題4の証明）．kに関する帰納法による．$k=1$のときは，定義4の$Pf|_{U_i}$の表示において$\alpha^{(1)} = \alpha$ととればよい．そこで，$k \ge 2$として，$k-1$のときには補題4は正しいと仮定して，kのときも正しいことをいう．帰納法の仮定をfの代わりにPfに用いると

$$\begin{aligned}
&(P^k f|_{U_i}) \circ \varphi_i^{-1} = (P^{k-1}(Pf)|_{U_i}) \circ \varphi_i^{-1} \\
&= \sum_{|\alpha^{(1)}| \le m} \cdots \sum_{|\alpha^{(k-1)}| \le m} \sum_{\beta^{(1)} \le \gamma^{(1)}} \cdots \sum_{\beta^{(k-2)} \le \gamma^{(k-2)}} \\
&\quad a_{\alpha^{(1)}}^{(i)} \binom{\gamma^{(1)}}{\beta^{(1)}} \left(\partial_{x^{(i)}}^{\beta^{(1)}} a_{\alpha^{(2)}}^{(i)}\right) \cdots \\
&\quad \times \binom{\gamma^{(k-2)}}{\beta^{(k-2)}} \left(\partial_{x^{(i)}}^{\beta^{(k-2)}} a_{\alpha^{(k-1)}}^{(i)}\right) \partial_{x^{(i)}}^{\gamma^{(k-1)}} ((Pf) \circ \varphi_i^{-1})
\end{aligned}$$

が成り立つ．ところが，定義4の$Pf|_{U_i}$の表示とライプニッツの規則から

$$\begin{aligned}
&\partial_{x^{(i)}}^{\gamma^{(k-1)}} ((Pf) \circ \varphi_i^{-1}) \\
&= \partial_{x^{(i)}}^{\gamma^{(k-1)}} \sum_{|\alpha^{(k)}| \le m} a_{\alpha^{(k)}}^{(i)}(x) \partial_{x^{(i)}}^{\alpha^{(k)}} (f \circ \varphi_i^{-1}) \\
&= \sum_{|\alpha^{(k)}| \le m} \sum_{\beta^{(k-1)} \le \gamma^{(k-1)}} \binom{\gamma^{(k-1)}}{\beta^{(k-1)}} \\
&\quad \times \left(\partial_{x^{(i)}}^{\beta^{(k-1)}} a_{\alpha^{(k)}}^{(i)}\right) \partial_{x^{(i)}}^{\gamma^{(k-1)} - \beta^{(k-1)} + \alpha^{(k)}} (f \circ \varphi_i^{-1}) \\
&= \sum_{|\alpha^{(k)}| \le m} \sum_{\beta^{(k-1)} \le \gamma^{(k-1)}} \binom{\gamma^{(k-1)}}{\beta^{(k-1)}} \\
&\quad \times \left(\partial_{x^{(i)}}^{\beta^{(k-1)}} a_{\alpha^{(k)}}^{(i)}\right) \partial_{x^{(i)}}^{\gamma^{(k)}} (f \circ \varphi_i^{-1})
\end{aligned}$$

となる．この最後の等式を得るのに，$\gamma^{(k)}$の定義から

$$\gamma^{(k-1)} - \beta^{(k-1)} + \alpha^{(k)} = \gamma^{(k)}$$

となることを用いた．この$(Pf) \circ \varphi_i^{-1}$の導関数の表示式を上の$(P^k f|_{U_i}) \circ \varphi_i^{-1}$の表示式の右辺に代入すると，$k$のときの補題4の結論が得られる． □

2.3 $|P^k f|$の座標近傍V_iの閉包上での評価

コンパクト実解析多様体Mの局所座標系$\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in A}$に対して，補題2によって，$M$の開被覆$\{V_i\}_{i \in A}$で，各$i \in A$に対して，$V_i$の閉包$\overline{V_i}$が元の$U_i$に含まれるようなものをとる．そして，添字$i \in A$を固定するとき，補題3における$\varphi_i(U_i)$上の単独の実解析関数$f \circ \varphi_i^{-1}$を，$\varphi_i(U_i)$上の有限個の実解析関数に拡張した次の補題が成り立つ．

補題 5 $f^{(i)} = f \circ \varphi_i^{-1}$および線型偏微分作用素$P$の制限$P|_{C^\omega(U_i)}$の係数$a_\alpha^{(i)}$ $(|\alpha| \le m)$に対して，正数$d^{(i)}$が存在して次が成り立つ：$x \in \varphi_i(\overline{V_i})$かつ，$z \in \mathbb{C}^n$, $|z_j - x_j| \le d^{(i)}$ $(1 \le j \le n)$であれば，zは$f^{(i)}$と$a_\alpha^{(i)}$ $(|\alpha| \le m)$の共通の正則域に属する． □

まず，補題4の表示と三角不等式から，

$$\begin{aligned}
&|(P^k f|_{\overline{V_i}}) \circ \varphi_i^{-1}| \\
&\le \sum_{|\alpha^{(1)}| \le m} \cdots \sum_{|\alpha^{(k)}| \le m} \sum_{\beta^{(1)} \le \gamma^{(1)}} \cdots \sum_{\beta^{(k-1)} \le \gamma^{(k-1)}} \\
&\quad \left|a_{\alpha^{(1)}}^{(i)}\right| \binom{\gamma^{(1)}}{\beta^{(1)}} \left|\partial_{x^{(i)}}^{\beta^{(1)}} a_{\alpha^{(2)}}^{(i)}\right| \cdots \\
&\quad \times \binom{\gamma^{(k-1)}}{\beta^{(k-1)}} \left|\partial_{x^{(i)}}^{\beta^{(k-1)}} a_{\alpha^{(k)}}^{(i)}\right| \left|\partial_{x^{(i)}}^{\gamma^{(k)}} (f \circ \varphi_i^{-1})\right|
\end{aligned}$$

となることに注意して，この右辺に現れる各因子を$\varphi_i(\overline{V_i})$上で評価しよう．

補題 6 補題5により正数$d^{(i)}$を定めて，集合$E^{(i)}$と正数$M(a_\alpha^{(i)})$, $M(f^{(i)})$を，それぞれ

$$\begin{aligned}
E^{(i)} &:= \bigcup_{x \in \varphi_i(\overline{V_i})} \{z \in \mathbb{C}^n;\ \\
&\qquad |z_j - x_j| \le d^{(i)}\ (1 \le j \le n)\}, \\
M(a_\alpha^{(i)}) &:= \sup_{z \in E^{(i)}} \left|a_\alpha^{(i)}(z)\right|, \\
M(f^{(i)}) &:= \sup_{z \in E^{(i)}} \left|f^{(i)}(z)\right|
\end{aligned}$$

によって定めるとき，$\varphi_i(\overline{V_i})$上で任意の$n$重指数$\beta, \gamma$に対して

$$\begin{aligned}
\left|\partial_{x^{(i)}}^{\beta} a_\alpha^{(i)}\right| &\le \beta!\, M(a_\alpha^{(i)})\, (d^{(i)})^{-|\beta|}, \\
\left|\partial_{x^{(i)}}^{\gamma} f^{(i)}\right| &\le \gamma!\, M(f^{(i)})\, (d^{(i)})^{-|\gamma|}
\end{aligned}$$

という評価が成り立つ． □

証明 4 （補題6の証明）．補題5によって，上で定義した集合$E^{(i)}$は，$f^{(i)}$および$a_\alpha^{(i)}$ $(|\alpha| \le m)$の共通の正則域に含まれる．そこでたとえば，$f^{(i)}$について考えよう．$x \in \varphi_i(\overline{V_i})$を任意に固定して，$j = 1, \cdots, n$に対して，$C_j := \{z_j \in \mathbb{C} : |z_j - x_j| = d^{(i)}\}$とおくと，コーシーの積分公式によって

$$\begin{aligned}
f^{(i)}(x) =& \frac{1}{(2\pi i)^n} \int \cdots \int_{\prod_{j=1}^{n} C_j} \\
&\qquad \frac{f^{(i)}(z)}{\prod_{j=1}^{n} (z_j - x_j)}\, dz_1 \cdots dz_n
\end{aligned}$$

が成り立つ．これより，$\gamma! = \prod_{j=1}^{n} \gamma_j!$として

$$
\begin{aligned}
\left|\partial^{\gamma}_{x^{(i)}} f^{(i)}(x)\right| &\le \frac{\gamma!}{(2\pi)^n} \int\cdots\int_{\prod_{j=1}^{n} C_j} \\
&\qquad \frac{|f^{(i)}(z)|}{\prod_{j=1}^{n} |z_j - x_j|^{1+\gamma_j}} |dz_1|\cdots|dz_n| \\
&\le \gamma!\, M(f^{(i)})\,(d^{(i)})^{-|\gamma|}
\end{aligned}
$$

となって，補題 6 が成り立つ．　□

補題 6 の直前の不等式の右辺に補題 6 を用いると，

$$
\begin{aligned}
&|(P^k f|_{\overline{V_i}}) \circ \varphi_i^{-1}| \\
\le &\sum_{|\alpha^{(1)}|\le m} \cdots \sum_{|\alpha^{(k)}|\le m} \sum_{\beta^{(1)}\le\gamma^{(1)}} \cdots \sum_{\beta^{(k-1)}\le\gamma^{(k-1)}} \\
&M\left(a^{(i)}_{\alpha^{(1)}}\right) \binom{\gamma^{(1)}}{\beta^{(1)}} \beta^{(1)}!\, M\left(a^{(i)}_{\alpha^{(2)}}\right) (d^{(i)})^{-|\beta^{(1)}|} \cdots \\
&\times \binom{\gamma^{(k-1)}}{\beta^{(k-1)}} \beta^{(k-1)}!\, M\left(a^{(i)}_{\alpha^{(k)}}\right) (d^{(i)})^{-|\beta^{(k-1)}|} \\
&\times \gamma^{(k)}!\, M\left(f\circ\varphi_i^{-1}\right) (d^{(i)})^{-|\gamma^{(k)}|} \\
\le &M\left(f\circ\varphi_i^{-1}\right) \sum_{|\alpha^{(1)}|\le m} \cdots \sum_{|\alpha^{(k)}|\le m} \\
&\times M\left(a^{(i)}_{\alpha^{(1)}}\right) \cdots M\left(a^{(i)}_{\alpha^{(k)}}\right) \\
&\times \sum_{\beta^{(1)}\le\gamma^{(1)}} \cdots \sum_{\beta^{(k-1)}\le\gamma^{(k-1)}} \binom{\gamma^{(1)}}{\beta^{(1)}} \beta^{(1)}! \cdots \\
&\times \binom{\gamma^{(k-1)}}{\beta^{(k-1)}} \beta^{(k-1)}!\, \gamma^{(k)}! \\
&\times (d^{(i)})^{-\left(|\gamma^{(k)}| + \sum_{\nu=1}^{k-1} |\beta^{(\nu)}|\right)} \\
\le &M\left(f\circ\varphi_i^{-1}\right) (d^{(i)})^{-mk} \sum_{|\alpha^{(1)}|\le m} \cdots \sum_{|\alpha^{(k)}|\le m} \\
&\times M\left(a^{(i)}_{\alpha^{(1)}}\right) \cdots M\left(a^{(i)}_{\alpha^{(k)}}\right) \\
&\times S\left(\alpha^{(1)}, \cdots, \alpha^{(k)}\right)
\end{aligned}
$$

を得る．ただし，最後の不等式では，必要なら$d^{(i)}$をさらに小さくとり直して$d^{(i)} \le 1$としてよいこと，ならびに

$$
\begin{aligned}
&|\gamma^{(k)}| + \sum_{\nu=1}^{k-1} |\beta^{(\nu)}| \\
=&\left|\sum_{\nu=1}^{k-1} \left(\alpha^{(\nu)} - \beta^{(\nu)}\right) + \alpha^{(k)}\right| + \sum_{\nu=1}^{k-1} |\beta^{(\nu)}| \\
=&\sum_{\nu=1}^{k} \left|\alpha^{(\nu)}\right| \le mk
\end{aligned}
$$

であること，および次の定義を用いた．

定義 5 $S\left(\alpha^{(1)}, \cdots, \alpha^{(k)}\right)$を

$$
\begin{aligned}
&S\left(\alpha^{(1)}, \cdots, \alpha^{(k)}\right) \\
&:= \sum_{\beta^{(1)}\le\gamma^{(1)}} \cdots \sum_{\beta^{(k-1)}\le\gamma^{(k-1)}} \binom{\gamma^{(1)}}{\beta^{(1)}} \beta^{(1)}! \cdots \\
&\quad \times \binom{\gamma^{(k-1)}}{\beta^{(k-1)}} \beta^{(k-1)}!\, \gamma^{(k)}!
\end{aligned}
$$

によって定める．　■

定義 5 の$S\left(\alpha^{(1)}, \cdots, \alpha^{(k)}\right)$についての次の評価が，この論文のキーをなす．

補題 7 n重指数$\alpha^{(\nu)}$ $(\nu = 1, \cdots, k)$が$|\alpha^{(\nu)}| \le m$を満たすとき，次の評価が成り立つ：

$$
S\left(\alpha^{(1)}, \cdots, \alpha^{(k)}\right) \le (mk)!\, e^{-(m+n)} \left(e^{1+(n/m)}\right)^{mk}.
$$

□

補題 7 の証明は第 4 節で与える．この節の残りの部分では補題 7 の成立を仮定して，定理 1 の証明に必要な形での，$|P^k f|$の座標近傍V_iの閉包上での評価を完成させよう．

定義 5 までの議論により，$x^{(i)} \in \varphi_i(\overline{V_i})$のとき，

$$
\begin{aligned}
&|(P^k f|_{\overline{V_i}}) \circ \varphi_i^{-1}| \\
\le &M\left(f\circ\varphi_i^{-1}\right) (d^{(i)})^{-mk} \sum_{|\alpha^{(1)}|\le m} \cdots \sum_{|\alpha^{(k)}|\le m} \\
&\times M\left(a^{(i)}_{\alpha^{(1)}}\right) \cdots M\left(a^{(i)}_{\alpha^{(k)}}\right) \\
&\times S\left(\alpha^{(1)}, \cdots, \alpha^{(k)}\right)
\end{aligned}
$$

がわかっている．この右辺に補題 7 を用いると

$$
\begin{aligned}
&|(P^k f|_{\overline{V_i}}) \circ \varphi_i^{-1}| \\
\le &M\left(f\circ\varphi_i^{-1}\right) (d^{(i)})^{-mk} \sum_{|\alpha^{(1)}|\le m} \cdots \sum_{|\alpha^{(k)}|\le m} \\
&\times M\left(a^{(i)}_{\alpha^{(1)}}\right) \cdots M\left(a^{(i)}_{\alpha^{(k)}}\right) \\
&\times (mk)!\, e^{-(m+n)} \left(e^{1+(n/m)}\right)^{mk} \\
= &M\left(f\circ\varphi_i^{-1}\right) (d^{(i)})^{-mk} \left(\sum_{|\alpha|\le m} M\left(a^{(i)}_{\alpha}\right)\right)^k \\
&\times (mk)!\, e^{-(m+n)} \left(e^{1+(n/m)}\right)^{mk} \\
= &(mk)! \left(r^{(i)}\right)^{mk} e^{-(m+n)} M\left(f\circ\varphi_i^{-1}\right) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

が得られる．ただし，最後の等式では，$r^{(i)}$を次で定めている：

$$
r^{(i)} := \frac{1}{d^{(i)}} e^{1+(n/m)} \left(\sum_{|\alpha|\le m} M\left(a^{(i)}_{\alpha}\right)\right)^{1/m}. \qquad (2)
$$

3.　多様体M上の関数のL^2ノルム

さて，2.3節で得られた評価式(1)を用いて，L^2ノルム$\|P^k f\|$を評価したい．それには，向きづけされたn次元のコンパクト実解析多様体M上でのL^2ノルム$\|P^k f\|$の定義を思い出す必要がある．大ざっぱにいえば，その定義には以下の４つの事実が関係している．

第１に，多様体Mには，その各点$x \in M$における**接空間**$T_x M$が定義でき，その直和

$$TM := \bigsqcup_{x \in M} T_x M$$

というものが定義される．このTMはMの**接束（タンジェント・バンドル）**と呼ばれる．さらに，接束TMを用いて，向きのバンドル

$$\bigwedge^n TM$$

が定義でき，それが自明なバンドルとなるとき，Mは**向きづけ可能**と呼ばれる．我々のMは向きづけ可能とし，しかもその向きが選ばれているものとする．このとき，多様体Mは**向きづけられている**という．

第２に，多様体Mがコンパクトであるとすれば，その任意の局所座標系$\{(U_i, \varphi_i)\}$に対して，開被覆$\{U_i\}$に従属する**１の分割**が存在するので，それを用いてMに**リーマン計量**を定めることができる．ここで，M上のリーマン計量g_Mとは，各接空間$T_x M$上の正定値な双一次形式（内積）$g_M(x)$で，xに関してC^∞級に依存するものをいう．

第３に，向きづけされたn次元リーマン多様体の上には，その計量から定まる**体積要素**と呼ばれる特別なn次微分形式dvが存在する．このdvは，各$x \in M$における接空間$T_x M$上の正の向きをもつ任意の正規直交基底$(e_1(x), \cdots, e_n(x))$に対して，関係

$$(dv)\,(e_1(x), \cdots, e_n(x)) = 1$$

が成り立つようなn次微分形式である．

第４に，向きづけられたn次元多様体Mの上では，一般のn次の**微分形式**ωに対して，M上での積分

$$\int_M \omega$$

が定義できる．したがって，上述の体積要素dvを用いると，M上の関数fの積分をn次微分形式$f\,dv$の積分として定義できる．特に，関数fのL^2ノルム$\|f\|$を

$$\|f\| := \left(\int_M |f|^2 \, dv \right)^{1/2}$$

として定義できる．

上の４つの事実については，坪井[2)3)]および服部[4)]を参照のこと．ただし，我々の定理１の証明に必要な範囲で，いくつかの定義と性質を復習しておこう．

3.1　n次元多様体上のp次微分形式

n次元多様体M上のp次の微分形式は，次のように定義される．

定義 6　$p = 1, \cdots, n$とする．αがM上のp次の**微分形式**であるとは，各点$x \in M$に対して，xにC^∞級に依存する写像

$$\alpha(x) : \underbrace{T_x M \times \cdots \times T_x M}_{p} \longrightarrow \mathbb{R}$$

が定まり，以下の性質を満たすときをいう：

(i) $\alpha(x)\,(v_1, \cdots, v_p)$は各$v_i$について線型写像；

(ii) p次の任意の置換$\sigma \in S_p$に対して，その符号を$\mathrm{sign}(\sigma)$として

$$\begin{aligned} &\alpha(x)\left(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(p)}\right) \\ &= \mathrm{sign}(\sigma)\,\alpha(x)\,(v_1, \cdots, v_p). \end{aligned}$$

性質(i), (ii)を，それぞれ写像$\alpha(x)$のp**重線型性**，**交代性**という．■

さらに，$p + q \leq n$のとき，p次の微分形式αとq次の微分形式βの**外積**と呼ばれる演算が，以下のように定義される：

定義 7　上のα, βに対して，$p + q$次の微分形式$\alpha \wedge \beta$を

$$\begin{aligned} &(\alpha \wedge \beta)(x)\ (v_1, \cdots, v_{p+q}) \\ :=&\frac{1}{p!\,q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \mathrm{sign}(\sigma)\,\alpha(x)\left(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(p)}\right) \\ &\times \beta(x)\left(v_{\sigma(p+1)}, \cdots, v_{\sigma(p+q)}\right) \end{aligned}$$

により定義する．■

局所座標系による微分形式の表示を述べておこう．それにはまず，Mの接束TMの局所座標系による表示が必要である．任意の局所座標系$\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in A}$に対して，

$$TU_i := \bigsqcup_{x \in U_i} T_x M$$

とおくと，各$v \in TU_i$には，直積集合$\varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n$の点

$$(\varphi_i)_*(v) := \left(x^{(i)}, \ \sum_{k=1}^n v_k^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_k^{(i)}} \right)$$

が１対１に対応する．ただし，$\pi : TM \longrightarrow M$を自然な射影（すなわち，$v \in T_x M$のとき，$\pi(v) = x$で定まる写像）とするとき，$x^{(i)} = \varphi_i(\pi(v))$である．

いま，$U_i \cap U_j \neq \emptyset$となる$i \neq j$に対して，$v \in T(U_i \cap U_j)$が，別の座標表示

$$(\varphi_j)_*(v) = \left(y^{(j)}, \ \sum_{l=1}^n w_l^{(j)} \frac{\partial}{\partial y_l^{(j)}} \right)$$

をもつとする．ただし，上と同様に，$y^{(j)} = \varphi_j(\pi(v))$である．このとき，$(\varphi_i)_*(v)$を$(\varphi_j)_*(v)$に移す写像を$\left(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}\right)_*$と書くと，関係式

$$y^{(j)} = \left(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}\right)(x^{(i)}),$$
$$\left(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}\right)_* \left(x^{(i)}, \frac{\partial}{\partial x_k^{(i)}}\right) = \left(y^{(j)}, \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial y_l^{(j)}}{\partial x_k^{(i)}} \frac{\partial}{\partial y_l^{(j)}}\right) \quad (\forall k = 1, \cdots, n)$$

が成立する．第2式の第2成分の間に成立する1次関係式は，$\mathbb{R}^n$における2つの基底

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_k^{(i)}}\right\}_{k=1,\cdots,n}, \left\{\frac{\partial}{\partial y_l^{(j)}}\right\}_{l=1,\cdots,n}$$

の間のよく知られた変換則を与えている．ただし，$x \in U_i \cap U_j$における接空間T_xMの像$(\varphi_i)_*(T_xM)$および$(\varphi_j)_*(T_xM)$をそれぞれ$\mathbb{R}^n$と同一視している．

ところで，上の2つの基底には，それらの双対基底と呼ばれる基底がそれぞれ存在する．それらはT_xM上の線型形式の全体T_x^*M（xにおける**余接空間**という）の基底である．たとえば，基底$\{\partial/\partial x_k^{(i)}\}$の**双対基底**とは，$(\varphi_i^{-1})^*(T_x^*M) = (\mathbb{R}^n)^* \simeq \mathbb{R}^n$における基底であって，それを

$$\left\{dx_l^{(i)}\right\}_{l=1,\cdots,n}$$

と表せば，関係式

$$dx_l^{(i)}\left(\frac{\partial}{\partial x_k^{(i)}}\right) = \delta_{k,l} \tag{3}$$

を満たすものとして定義される．ただし，$\delta_{k,l}$はクロネッカーのデルタ記号である．

この双対基底を用いれば，次の定理が成り立つ．

定理 2 多様体M上の任意のp次微分形式αは，局所座標を用いて一意的に

$$\left(\varphi_i^{-1}\right)^* (\alpha|_{U_i}) = \sum_{l_1 < \cdots < l_p} f_{l_1,\cdots,l_p}^{(i)}(x^{(i)})\, dx_{l_1}^{(i)} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p}^{(i)} \tag{4}$$

と表される．□

証明 5 （定理2の証明）．まず次のことに注意することから始めよう．接ベクトル$v_j \in T_xM$を，局所座標を用いて

$$(\varphi_i)_*(v_j) := \left(x^{(i)}, \sum_{k=1}^{n} v_{j,k}^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_k^{(i)}}\right)$$

と表示するとき，定義6の微分形式αのp重線型性によって，

$$\begin{aligned}
&\alpha(x)(v_1, \cdots, v_p) \\
&= \left[(\varphi_i^{-1})^*\alpha\right](x^{(i)})\left((\varphi_i)_*v_1, \cdots, (\varphi_i)_*v_p\right) \\
&= \left[(\varphi_i^{-1})^*\alpha\right](x^{(i)}) \\
&\quad \times \left(\sum_{k_1=1}^{n} v_{1,k_1}^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_{k_1}^{(i)}}, \cdots, \sum_{k_p=1}^{n} v_{p,k_p}^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_{k_p}^{(i)}}\right) \\
&= \sum_{k_1=1}^{n} \cdots \sum_{k_p=1}^{n} v_{1,k_1}^{(i)} \cdots v_{p,k_p}^{(i)} \\
&\quad \times \left[(\varphi_i^{-1})^*\alpha\right](x^{(i)}) \left(\frac{\partial}{\partial x_{k_1}^{(i)}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_{k_p}^{(i)}}\right)
\end{aligned}$$

となる．さらに，αの交代性によって，上の右辺に現れる和は，実際にはp個の自然数$k_1, \cdots, k_p$がすべて相異なる場合だけであることがわかる．そこで，そのような$k_1, \cdots, k_p$だけを考えることにして，それらを小さい順に並べ替える置換，すなわち

$$k_{\sigma(1)} < \cdots < k_{\sigma(p)}$$

となるp次の置換をσとして，$k_{\sigma(\nu)}$を改めてk'_νと書き，また

$$c_{k'_1,\cdots k'_p}(v_1, \cdots, v_p) := \mathrm{sign}(\sigma)\, v_{1,k_1}^{(i)} \cdots v_{p,k_p}^{(i)}$$

と書くことにすれば，上の等式の右辺は

$$\sum_{k'_1 < \cdots < k'_p} c_{k'_1,\cdots k'_p}(v_1, \cdots, v_p) \times \left[(\varphi_i^{-1})^*\alpha\right](x^{(i)}) \left(\frac{\partial}{\partial x_{k'_1}^{(i)}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_{k'_p}^{(i)}}\right)$$

となることがわかる．よって，k'_νを改めてk_νと書けば，次の等式を得る．

$$\begin{aligned}
&\alpha(x)(v_1, \cdots, v_p) \\
&= \left[(\varphi_i^{-1})^*\alpha\right](x^{(i)})\left((\varphi_i)_*v_1, \cdots, (\varphi_i)_*v_p\right) \\
&= \sum_{k_1 < \cdots < k_p} c_{k_1,\cdots k_p}(v_1, \cdots, v_p) \\
&\quad \times \left[(\varphi_i^{-1})^*\alpha\right](x^{(i)}) \left(\frac{\partial}{\partial x_{k_1}^{(i)}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_{k_p}^{(i)}}\right).
\end{aligned} \tag{5}$$

この等式(5)は，微分形式αが，$\left[(\varphi_i^{-1})^*\alpha\right](x^{(i)})$の

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_{k_1}^{(i)}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_{k_p}^{(i)}}\right)$$

における値だけで，すべて決定されることを示している．ただし，$k_1, \cdots, k_p$は

$$1 \leq k_1 < \cdots < k_p \leq n$$

なる範囲にわたって動く．

定理2を示すための鍵は，次の補題である．

補題 8 $1 \le k_1 < \cdots < k_p \le n$，かつ$1 \le l_1 < \cdots < l_p \le n$のとき，外積$dx^{(i)}_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx^{(i)}_{l_p}$は

$$\left(dx^{(i)}_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx^{(i)}_{l_p}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^{(i)}_{k_1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{(i)}_{k_p}}\right) = \delta_{k_1, l_1}\,\delta_{k_2, l_2}\cdots\delta_{k_p, l_p} \tag{6}$$

を満たす．ただし，左辺の外積は定義 7 によって帰納的に定まるものである．　□

証明 6 （補題 8 の証明）．pに関する帰納法による．$p=1$のとき，補題 8 の結論は双対基底の条件(3)から明らかである．次に，$p \ge 2$として，$p-1$に対しては補題は正しいと仮定する．外積の定義から

$$\begin{aligned}
&\left(dx^{(i)}_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx^{(i)}_{l_p}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^{(i)}_{k_1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{(i)}_{k_p}}\right)\\
=&\left[\left(dx^{(i)}_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx^{(i)}_{l_{p-1}}\right) \wedge dx^{(i)}_{l_p}\right]\left(\frac{\partial}{\partial x^{(i)}_{k_1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{(i)}_{k_p}}\right)\\
=&\frac{1}{(p-1)!\,1!}\sum_{\sigma\in S_p}\mathrm{sign}(\sigma)\\
&\times\left(dx^{(i)}_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx^{(i)}_{l_{p-1}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^{(i)}_{k_{\sigma(1)}}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{(i)}_{k_{\sigma(p-1)}}}\right)\\
&\times(dx^{(i)}_{l_p})\left(\frac{\partial}{\partial x^{(i)}_{k_{\sigma(p)}}}\right)
\end{aligned} \tag{7}$$

となることに注意しよう．

まず，$(k_1, \cdots, k_p) \ne (l_1, \cdots, l_p)$のとき，(7)の右辺が零であることを示そう．$k_\nu$や$l_\nu$が，それぞれ小さい順に番号づけされていることを思い出すと，$(k_1, \cdots, k_p) \ne (l_1, \cdots, l_p)$であれば，集合としても

$$\{k_1, \cdots, k_p\} \ne \{l_1, \cdots, l_p\}$$

となるので，$k_\nu \notin \{l_1, \cdots, l_p\}$となる番号$\nu$が存在する．ここで$\sigma(p) = \nu$の場合と，$\sigma(p) \ne \nu$の場合とに場合分けして考える．前者の場合は，$l_p \ne k_\nu = k_{\sigma(p)}$によって

$$(dx^{(i)}_{l_p})\left(\frac{\partial}{\partial x^{(i)}_{k_{\sigma(p)}}}\right) = 0$$

となるので，(7)の右辺は零となる．後者の場合は，$\sigma(\mu) = \nu$となる番号μは$\mu \le p-1$を満たすから，$(l_1, \cdots, l_{p-1}) \ne (k_{\sigma(1)}, \cdots, k_{\sigma(p-1)})$となる．すると，帰納法の仮定によって

$$\left(dx^{(i)}_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx^{(i)}_{l_{p-1}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^{(i)}_{k_{\sigma(1)}}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{(i)}_{k_{\sigma(p-1)}}}\right) = 0$$

が成り立ち，この場合にも，(7)の右辺は零となる．以上で，$(k_1, \cdots, k_p) \ne (l_1, \cdots, l_p)$のとき，(7)の右辺が零であることが示せた．

次に，$(k_1, \cdots, k_p) = (l_1, \cdots, l_p)$のとき，(7)の右辺が 1 に等しいことを示そう．(7)の右辺の和において，零でないような項については，

$$(dx^{(i)}_{l_p})\left(\frac{\partial}{\partial x^{(i)}_{l_{\sigma(p)}}}\right) = 1$$

であるから，$l_p = l_{\sigma(p)}$でなければならない．ゆえに，$\sigma(p) = p$となって，(7)の右辺の$\sigma \in S_p$についての和は，実際には$\sigma \in S_{p-1}$についての和になる．すると(7)の右辺は，交代性と帰納法の仮定を用いて次のように計算できる：

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(p-1)!\,1!}\sum_{\sigma\in S_{p-1}}\mathrm{sign}(\sigma)\\
&\times\left(dx^{(i)}_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx^{(i)}_{l_{p-1}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^{(i)}_{l_{\sigma(1)}}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{(i)}_{l_{\sigma(p-1)}}}\right)\\
&= \frac{1}{(p-1)!}\sum_{\sigma\in S_{p-1}}(\mathrm{sign}(\sigma))^2\\
&\times\left(dx^{(i)}_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx^{(i)}_{l_{p-1}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^{(i)}_{l_1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{(i)}_{l_{p-1}}}\right)\\
&= \frac{1}{(p-1)!} \times \sharp(S_{p-1}) = 1.
\end{aligned}$$

以上で，補題 8 が示せた．　□

さて，補題 8 を用いて定理 2 の証明を完成させよう．示すべきことは，

$$\begin{aligned}
&f^{(i)}_{l_1, \cdots, l_p}(x^{(i)})\\
&:= \left[(\varphi_i^{-1})^*\alpha\right](x^{(i)})\left(\frac{\partial}{\partial x^{(i)}_{l_1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{(i)}_{l_p}}\right)
\end{aligned} \tag{8}$$

と定めれば定理 2 の結論の等式(4)が成り立つこと，および係数$f^{(i)}_{l_1, \cdots, l_p}$の一意性である．

ところで(5)に注意すれば，等式(4)が成り立つためには，この(4)が，$k_1 < \cdots < k_p$を満たすような任意の

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^{(i)}_{k_1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{(i)}_{k_p}}\right)$$

に対して成り立てば十分である．ところが，補題 8 と$f^{(i)}_{l_1, \cdots, l_p}$の定義式(8)によって

$$\left[\sum_{l_1<\cdots<l_p} f^{(i)}_{l_1,\cdots,l_p}(x^{(i)})\,dx^{(i)}_{l_1}\wedge\cdots\wedge dx^{(i)}_{l_p}\right]$$
$$\times\left(\frac{\partial}{\partial x^{(i)}_{k_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{(i)}_{k_p}}\right)$$
$$=\sum_{l_1<\cdots<l_p} f^{(i)}_{l_1,\cdots,l_p}(x^{(i)})\,\delta_{k_1,l_1}\,\delta_{k_2,l_2}\cdots\delta_{k_p,l_p}$$
$$=f^{(i)}_{k_1,\cdots,k_p}(x^{(i)})$$
$$=\left[(\varphi_i^{-1})^*\alpha\right](x^{(i)})\left(\frac{\partial}{\partial x^{(i)}_{k_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{(i)}_{k_p}}\right)$$

となって，等式(4)が成り立つことがいえた．

最後に，係数$f^{(i)}_{l_1,\cdots,l_p}$の一意性を示そう．それには，等式(4)を成り立たせるような係数列$\{f^{(i)}_{l_1,\cdots,l_p}\}$が２つあったとして，それらの差を考えれば，結局，次を示せばよい：

$$\sum_{l_1<\cdots<l_p} f^{(i)}_{l_1,\cdots,l_p}(x^{(i)})\,dx^{(i)}_{l_1}\wedge\cdots\wedge dx^{(i)}_{l_p}=\mathbf{0}$$
$$\Longrightarrow\ f^{(i)}_{k_1,\cdots,k_p}(x^{(i)})=0\quad(\forall(k_1,\cdots,k_p))\tag{9}$$

ところが，(9)の仮定の下では，再び補題８から

$$0=\left[\sum_{l_1<\cdots<l_p} f^{(i)}_{l_1,\cdots,l_p}(x^{(i)})\,dx^{(i)}_{l_1}\wedge\cdots\wedge dx^{(i)}_{l_p}\right]$$
$$\times\left(\frac{\partial}{\partial x^{(i)}_{k_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{(i)}_{k_p}}\right)$$
$$=\sum_{l_1<\cdots<l_p} f^{(i)}_{l_1,\cdots,l_p}(x^{(i)})\,\delta_{k_1,l_1}\,\delta_{k_2,l_2}\cdots\delta_{k_p,l_p}$$
$$=f^{(i)}_{k_1,\cdots,k_p}(x^{(i)})\quad(\forall(k_1,\cdots,k_p))$$

となるので，(9)の結論が成り立つ．以上で，定理２が証明できた．□

3.2　C^∞級多様体上の１の分割

n次微分形式ωのM上での積分を次の3.3節において定義する．そのためにはこのωを，個々の座標近傍U_i内に台をもつような微分形式の有限和に分解する必要がある．この操作を行うために有用な道具が１の分割と呼ばれるC^∞級の関数族である．

定義 8　M上の関数fやp次微分形式αに対して，その台(support)を

$$\mathrm{supp}(f):=\overline{\{x\in M\,;\,f(x)\neq 0\}}$$
$$\mathrm{supp}(\alpha):=\overline{\{x\in M\,;\,\alpha(x)\neq \mathbf{0}\}}$$

により定める．ただし，記号$\overline{X}$は集合Xの閉包を表す．■

定義８において，p次の微分形式αについては，3.1節の定理２から，その値$\alpha(x)$は$\binom{n}{p}$次元のベクトル空間内にあることがわかる．ゆえに，値$\alpha(x)$が零ベクトルであるかないかに意味があることに注意しよう．

定義 9　多様体Mの局所座標系を$\{(U_i,\,\varphi_i)\}_{i\in A}$とする．このとき，$M$上の$C^\infty$級の関数族$\{\lambda_k\}_{k\in B}$が，開被覆$\{U_i\}_{i\in A}$に従属した**１の分割**(partition of unity)であるとは，以下の条件が成り立つことをいう：

(i) すべての$x\in M,\,k\in B$に対して，$\lambda_k(x)\geq 0$；

(ii) すべての$k\in B$に対して，ある$i=i(k)\in A$が存在して，$\mathrm{supp}(\lambda_k)\subset U_{i(k)}$；

(iii) すべての$x\in M$に対して，xの開近傍Wが存在して，$W\cap\mathrm{supp}(\lambda_k)\neq\emptyset$となる$k$は高々有限個である；

(iv) すべての$x\in M$に対して，$\sum_{k\in B}\lambda_k(x)=1$．■

定義９において，条件(iii)は閉被覆$\{\mathrm{supp}(\lambda_k)\}_{k\in B}$の局所有限性と呼ばれる．この性質のおかげで，条件(iv)のkに関する和は実際には有限和であり，和は確定する．また(iv)によって，$\{\mathrm{supp}(\lambda_k)\}_{k\in B}$が$M$の被覆であることがわかる．

次のことはよく知られている（たとえば坪井[2)]）：

補題 9　MがコンパクトなC^∞級の多様体であるとき，Mの任意の局所座標系$\{(U_i,\,\varphi_i)\}_{i\in A}$に対して，開被覆$\{U_i\}_{i\in A}$に従属した１の分割$\{\lambda_k\}_{k\in B}$が存在する．□

3.3　n次元多様体上のn次微分形式の積分

n次元多様体上のn次微分形式ωを考えよう．定理２で特に$p=n$として，$l_1<\cdots<l_n$となるのは$l_\nu=\nu\ (1\leq\nu\leq n)$の場合しかないことを考慮すると，各座標近傍上への制限$\omega|_{U_i}$の引き戻しは

$$\left(\varphi_i^{-1}\right)^*(\omega|_{U_i})=f^{(i)}(x^{(i)})\,dx^{(i)}_1\wedge\cdots\wedge dx^{(i)}_n\tag{10}$$

と，一意的に表されることがわかる．

さて，向きづけられたコンパクト多様体Mの，向きと同調するような任意の局所座標系$\{(U_i,\,\varphi_i)\}_{i\in A}$に対して，補題９を用いて，開被覆$\{U_i\}_{i\in A}$に従属した１の分割$\{\lambda_k\}_{k\in B}$をひとつ任意に選び，それを固定して，次の定義をおく．

定義 10　$\omega|_{U_i}$の引き戻しの表示(10)を用いて，台が$U_{i(k)}$内にあるn次微分形式$\lambda_k\omega$のM上での積分を次のように定義する（ここで，添字$i=i(k)$は，定義９の条件(ii)に現れるものである）：

$$\int_M \lambda_k \omega := \int_{\mathbb{R}^n} \left[\left(\varphi_i^{-1}\right)^* \lambda_k \right] (x^{(i)})\, f^{(i)}(x^{(i)})\, dx_1^{(i)} \cdots dx_n^{(i)}. \tag{11}$$

ただし，この右辺の積分は，実際には$\mathbb{R}^n$の有界閉集合$\varphi_i\,(\mathrm{supp}(\lambda_k))$上での（$n$重）積分である．■

定義10の積分をkについてたし合わせたものを，n次微分形式ωの積分と定める．すなわち，

定義 11

$$\int_M \omega := \sum_{k\in B} \int_M \lambda_k \omega. \tag{12}$$

■

この定義11が，Mの向きを定める局所座標系やそれに従属した１の分割の取り方に依らず，ωだけに依存して決まることは，次の補題による（坪井[3]）．

補題 10 Mの向きと同調するような，２つの局所座標系を$\{(U_i,\,\varphi_i)\}_{i\in A}$と$\{(V_j,\,\psi_j)\}_{j\in A'}$とする．また，$\{\lambda_k\}$と$\{\mu_l\}$を，それぞれ，開被覆$\{U_i\}$と$\{V_j\}$に従属した１の分割であるとする．このとき，任意の固定されたkに対して

$$\sum_l \int_M \mu_l \lambda_k \omega = \int_M \lambda_k \omega$$

が成り立つ．□

補題10において，$\{\lambda_k\}$と$\{\mu_l\}$の役割を入れ替えると，任意の固定されたlに対して

$$\sum_k \int_M \lambda_k \mu_l \omega = \int_M \mu_l \omega$$

が成り立つこともわかる．その結果，

$$\begin{aligned}\sum_k \int_M \lambda_k \omega &= \sum_k \left(\sum_l \int_M \mu_l \lambda_k \omega \right) \\ &= \sum_l \left(\sum_k \int_M \lambda_k \mu_l \omega \right) \\ &= \sum_l \int_M \mu_l \omega\end{aligned}$$

が成り立つので，定義11のωの積分が，Mの向きと同調する局所座標系やそれに従属した１の分割の取り方に依らず，ωだけに依存して決まることがわかる．

3.4　コンパクト多様体上のリーマン計量の存在

MはコンパクトなC^∞級の多様体とし，局所座標系を$\{(U_i,\,\varphi_i)\}_{i\in A}$とする．このとき，補題９によって，開被覆$\{U_i\}$に従属する１の分割$\{\lambda_k\}$が存在する．このことを用いて，$M$上にリーマン計量が存在することを示そう．

M上のリーマン計量g_Mとは，各接空間T_xM上の正定値な双一次形式（内積）$g_M(x)$で，xに関してC^∞級に依存するものをいう．したがって，各座標近傍U_i上で，接ベクトル$u,\,v \in T_xM,\ (x\in U_i)$を

$$(\varphi_i)_* u = \left(x^{(i)},\, \sum_{\nu=1}^n u_\nu^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_\nu^{(i)}} \right)$$
$$(\varphi_i)_* v = \left(x^{(i)},\, \sum_{\nu=1}^n v_\nu^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_\nu^{(i)}} \right)$$

と表示して，

$$q^{(i)}(x^{(i)})((\varphi_i)_* u,\, (\varphi_i)_* v) := \sum_{\nu=1}^n u_\nu^{(i)}\, v_\nu^{(i)}$$

とおき，それらを１の分割を用いてたしあわせて

$$\begin{aligned}&g_M(x)(u,\,v) \\ &:= \sum_{k\in B} \lambda_k(x) q^{(i)}\left(\varphi_i(x)\right)\left((\varphi_i)_* u,\, (\varphi_i)_* v\right)\Big|_{i=i(k)}\end{aligned} \tag{13}$$

と定義すれば，このg_Mが，xに関してC^∞級に依存するような，各接空間T_xM上の正定値な双一次形式（内積）$g_M(x)$を与えることが，容易にわかる．

3.5　向きづけられたリーマン多様体上の体積要素

定義 12 Mのリーマン計量g_Mをひとつ固定する．その計量から定まるMの**体積要素**とは，各$x\in M$における接空間T_xM上の正の向きをもつ任意の正規直交基底$(e_1(x),\,\cdots,\,e_n(x))$に対して，関係

$$(dv)\,(e_1(x),\,\cdots,\,e_n(x)) = 1$$

が成り立つようなn次微分形式dvのことをいう．■

この体積要素が局所座標系を用いて記述できることを示しておこう．

補題 11 Mの向きと同調する任意の局所座標系$\{(U_i,\,\varphi_i)\}$に対して，点$x\in U_i$の座標を$x^{(i)}=\varphi_i(x)$として，U_i上でのリーマン計量を表すn次正方行列$G^{(i)} = \left(g_{k,\,l}^{(i)}\right)$を

$$g_{k,\,l}^{(i)} = \left[\left(\varphi_i^{-1}\right)^* (g_M|_{U_i}) \right] (x^{(i)}) \left(\frac{\partial}{\partial x_k^{(i)}},\, \frac{\partial}{\partial x_l^{(i)}} \right) \tag{14}$$

により定義すれば，

$$\left(\varphi_i^{-1}\right)^* (dv|_{U_i}) = \sqrt{\det G^{(i)}}\, dx_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge dx_n^{(i)} \tag{15}$$

という表示が成り立つ．□

証明 7 （補題11の証明）．基底$(e_1(x), \cdots, e_n(x))$の正規直交性はリーマン計量に関するものであるから，$e_\mu(x)$を

$$(\varphi_i)_*(e_\mu(x)) = \left(x^{(i)}, \sum_{p=1}^n a_{p,\mu}\frac{\partial}{\partial x_p^{(i)}}\right)$$

と表せば，正規直交性と(14)から次の関係式を得る：

$$\begin{aligned}
&\delta_{\mu,\nu}\\
=&g_M(x)\,(e_\mu(x),\, e_\nu(x))\\
=&\left[\left(\varphi_i^{-1}\right)^* g_M\right](x^{(i)})\left(\sum_{p=1}^n a_{p,\mu}\frac{\partial}{\partial x_p^{(i)}}, \sum_{q=1}^n a_{q,\nu}\frac{\partial}{\partial x_q^{(i)}}\right)\\
=&\sum_{p=1}^n\sum_{q=1}^n a_{p,\mu}\,a_{q,\nu}\left[\left(\varphi_i^{-1}\right)^* g_M\right](x^{(i)})\left(\frac{\partial}{\partial x_p^{(i)}}, \frac{\partial}{\partial x_q^{(i)}}\right)\\
=&\sum_{p=1}^n\sum_{q=1}^n a_{p,\mu}\,a_{q,\nu}g_{p,q}^{(i)}. \qquad (16)
\end{aligned}$$

ここで，行列Aを$A := (a_{p,\mu})$で定義すれば，関係式(16)は${}^tAG^{(i)}A = I_n$を意味する．したがって，$G^{(i)}$が正定値の対称行列だから$\det G^{(i)} > 0$であることを用いて

$$\begin{aligned}
1 = \det I_n &= (\det A)^2 \det G^{(i)}\\
&= \left((\det A)\sqrt{\det G^{(i)}}\right)^2
\end{aligned}$$

が成り立つ．さらに，正規直交基底が正の向きであるとの仮定から$\det A > 0$もわかるので，

$$(\det A)\sqrt{\det G^{(i)}} = 1 \qquad (17)$$

がいえる．一方

$$\begin{aligned}
&(dx_1^{(i)}\wedge\cdots\wedge dx_n^{(i)})\,((\varphi_i)_*\,e_1(x), \cdots, (\varphi_i)_*\,e_n(x))\\
=&(dx_1^{(i)}\wedge\cdots\wedge dx_n^{(i)})\\
&\times\left(\sum_{p_1=1}^n a_{p_1,1}\frac{\partial}{\partial x_{p_1}^{(i)}}, \cdots, \sum_{p_n=1}^n a_{p_n,n}\frac{\partial}{\partial x_{p_n}^{(i)}}\right)\\
=&\sum_{p_1=1}^n\cdots\sum_{p_n=1}^n a_{p_1,1}\cdots a_{p_n,n}\\
&\times(dx_1^{(i)}\wedge\cdots\wedge dx_n^{(i)})\left(\frac{\partial}{\partial x_{p_1}^{(i)}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_{p_n}^{(i)}}\right) \qquad (18)
\end{aligned}$$

となる．ここで，微分形式の交代性から，右辺で零でない項は$p_1, \cdots, p_n$がすべて相異なる場合のみである．そこで，このような場合だけを考えることにして，n次置換σを

$$\sigma(j) := p_j \quad (j = 1, \cdots, n)$$

で定めると，(18)の右辺は，微分形式の交代性と補題８および(17)から

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma\in S_n} a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n}\\
&\times(dx_1^{(i)}\wedge\cdots\wedge dx_n^{(i)})\left(\frac{\partial}{\partial x_{\sigma(1)}^{(i)}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_{\sigma(n)}^{(i)}}\right)\\
=&\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sign}(\sigma)\,a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n}\\
&\times(dx_1^{(i)}\wedge\cdots\wedge dx_n^{(i)})\left(\frac{\partial}{\partial x_1^{(i)}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n^{(i)}}\right)\\
=&\det A = \frac{1}{\sqrt{\det G^{(i)}}}
\end{aligned}$$

に等しい．したがって，

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\det G^{(i)}}\,(dx_1^{(i)}\wedge\cdots\wedge dx_n^{(i)})\\
&\qquad\times((\varphi_i)_*\,e_1(x), \cdots, (\varphi_i)_*\,e_n(x))\\
=&\sqrt{\det G^{(i)}}\times\frac{1}{\sqrt{\det G^{(i)}}} = 1
\end{aligned}$$

がいえる．ゆえに，等式(15)が成り立つ．以上で補題11が示せた．□

4. 定理１の証明の第２段

4.1 定理１の証明の補題７への帰着

この節では，2.3節の最後に得られた$|P^kf|$の座標近傍V_iの閉包上での評価式(1)から定理１を導く．ここで，座標近傍V_iは補題２によって定まる近傍，すなわち，その閉包$\overline{V_i}$が元の座標近傍U_iに含まれ，かつ，$\{V_i\}$がMの開被覆をなすように選ばれている．Mはコンパクトな多様体だから，一般性を失わずに，$\{V_i\}$が有限開被覆だとしてよい．そこで，補題９を適用して，被覆$\{V_i\}$に従属する１の分割$\{\lambda_l\}$をとろう．このとき，L^2ノルムの定義と評価式(1)から，$i = i(l)$という略記の下で

$$\begin{aligned}
&\int_M\left|P^kf\right|^2\,dv = \sum_{l\in B}\int_M\lambda_l\left|P^kf\right|^2\,dv\\
=&\sum_{l\in B}\int_{\mathbb{R}^n}\left[\left(\varphi_i^{-1}\right)^*\left(\lambda_l\left|P^kf\right|^2\right)\right](x^{(i)})\\
&\times\sqrt{\det G^{(i)}}\,dx_1^{(i)}\cdots dx_n^{(i)}\\
=&\sum_{l\in B}\int_{\varphi_i(\overline{V_i})}(\lambda_l\circ\varphi_i^{-1})(x^{(i)})\\
&\times\left|(P^kf\circ\varphi_i^{-1})(x^{(i)})\right|^2\sqrt{\det G^{(i)}}\,dx_1^{(i)}\cdots dx_n^{(i)}\\
\le&\sum_{l\in B}\left[(mk)!\left(r^{(i)}\right)^{mk}e^{-(m+n)}M\left(f\circ\varphi_i^{-1}\right)\right]^2\\
&\times\int_{\varphi_i(\overline{V_i})}(\lambda_l\circ\varphi_i^{-1})(x^{(i)})\sqrt{\det G^{(i)}}\,dx_1^{(i)}\cdots dx_n^{(i)}
\end{aligned} \qquad (19)$$

が得られる．ただし，$r^{(i)}$は(2)で定まる正数である．ここで

$$r := \max_{i\in A} r^{(i)}, \quad M(f) := \max_{i\in A} M\left(f\circ\varphi_i^{-1}\right) \tag{20}$$

とおくと，(19)の両辺の平方根をとって，次を得る：

$$\begin{aligned}
&\|P^k f\| = \left(\int_M \left|P^k f\right|^2 dv\right)^{1/2} \\
\le&(mk)!\, r^{mk} e^{-(m+n)}\, M(f)\times \\
&\left(\sum_{l\in B}\int_{\mathbb{R}^n}(\lambda_l\circ\varphi_i^{-1})(x^{(i)})\sqrt{\det G^{(i)}}\, dx_1^{(i)}\cdots dx_n^{(i)}\right)^{1/2} \\
=&(mk)!\, r^{mk} e^{-(m+n)}\, M(f)\left(\sum_{l\in B}\int_M \lambda_l\, dv\right)^{1/2} \\
=&(mk)!\, r^{mk} e^{-(m+n)}\, M(f)\left(\int_M dv\right)^{1/2} \\
=&(mk)!\, r^{mk} e^{-(m+n)}\, M(f)\sqrt{\mathrm{vol}(M)}.
\end{aligned} \tag{21}$$

ただし，$\mathrm{vol}(M)$は多様体Mの体積を表す．この不等式(21)から直ちに

$$\begin{aligned}
\mu_{P,r}(f) &= \sup_{k\in\mathbb{Z}_+}\frac{1}{(mk)!\, r^{mk}}\|P^k f\| \\
&\le e^{-(m+n)}\, M(f)\sqrt{\mathrm{vol}(M)} < \infty
\end{aligned}$$

が得られる．また，$r^{(i)}$の定義(2)とrの定義(20)から，指数$\mu_{P,r}(f)$の有限性を与える正数rが

$$r = \max_{i\in A}\frac{1}{d^{(i)}}\, e^{1+(n/m)}\left(\sum_{|\alpha|\le m} M\left(a_\alpha^{(i)}\right)\right)^{1/m} \tag{22}$$

で定まり，それゆえrは，fおよび微分作用素Pの係数の収束半径と，作用素の係数の収束域上での最大値ノルムおよび比n/mにのみに依ることがわかる．以上で，補題７の証明を除いて，定理１の証明が完成した．

4.2　補題７の証明の補題12への帰着

残っているのは補題７の証明だけである．この節では，それをある補題（補題12）へ帰着させることができることを示す．まず，問題となる量$S(\alpha^{(1)},\cdots,\alpha^{(k)})$の定義５を思い出そう．すると

$$\begin{aligned}
&S\left(\alpha^{(1)},\cdots,\alpha^{(k)}\right) \\
:=&\sum_{\beta^{(1)}\le\gamma^{(1)}}\cdots\sum_{\beta^{(k-1)}\le\gamma^{(k-1)}}\binom{\gamma^{(1)}}{\beta^{(1)}}\beta^{(1)}!\cdots \\
&\times\binom{\gamma^{(k-1)}}{\beta^{(k-1)}}\beta^{(k-1)}!\,\gamma^{(k)}! \\
=&\sum_{\beta^{(1)}\le\gamma^{(1)}}\cdots\sum_{\beta^{(k-1)}\le\gamma^{(k-1)}} \\
&\frac{\gamma^{(1)}!}{(\gamma^{(1)}-\beta^{(1)})!}\cdots\frac{\gamma^{(k-1)}!}{(\gamma^{(k-1)}-\beta^{(k-1)})!}\gamma^{(k)}!
\end{aligned} \tag{23}$$

となるが，ここで，補題４の$\gamma^{(\nu)}$の定義式によって$\gamma^{(1)}=\alpha^{(1)}$かつ，任意の$\nu\ge 2$に対して

$$\gamma^{(\nu-1)}-\beta^{(\nu-1)}=\gamma^{(\nu)}-\alpha^{(\nu)}$$

が成り立つことを考慮して(23)の右辺を書き直せば，次を得る：

$$\begin{aligned}
&S\left(\alpha^{(1)},\cdots,\alpha^{(k)}\right) \\
=&\sum_{\beta^{(1)}\le\gamma^{(1)}}\cdots\sum_{\beta^{(k-1)}\le\gamma^{(k-1)}} \\
&\alpha^{(1)}!\frac{\gamma^{(2)}!}{(\gamma^{(2)}-\alpha^{(2)})!}\cdots\frac{\gamma^{(k)}!}{(\gamma^{(k)}-\alpha^{(k)})!}.
\end{aligned} \tag{24}$$

ところで，(24)の右辺を

$$\prod_{j=1}^n T_j\left(\alpha_j^{(1)},\cdots,\alpha_j^{(k)}\right)$$

と積の形に表示することができる．ただし，各$j=1,\cdots,n$に対して

$$\begin{aligned}
&T_j\left(\alpha_j^{(1)},\cdots,\alpha_j^{(k)}\right) \\
:=&\alpha_j^{(1)}!\sum_{\beta_j^{(1)}=0}^{\gamma_j^{(1)}}\cdots\sum_{\beta_j^{(k-1)}=0}^{\gamma_j^{(k-1)}}\prod_{\nu=2}^{k}\frac{\gamma_j^{(\nu)}!}{(\gamma_j^{(\nu)}-\alpha_j^{(\nu)})!}
\end{aligned} \tag{25}$$

と定める．ここで

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma_j^{(\nu)}!}{(\gamma_j^{(\nu)}-\alpha_j^{(\nu)})!} &= \prod_{k=1}^{\alpha_j^{(\nu)}}\left(\gamma_j^{(\nu)}-\alpha_j^{(\nu)}+k\right) \\
&=: \left(\gamma_j^{(\nu)}-\alpha_j^{(\nu)}+1\right)_{\alpha_j^{(\nu)}}
\end{aligned}$$

という記法を用いると，(25)は

$$\begin{aligned}
&T_j\left(\alpha_j^{(1)},\cdots,\alpha_j^{(k)}\right) \\
=&\alpha_j^{(1)}!\sum_{\beta_j^{(1)}=0}^{\gamma_j^{(1)}}\cdots\sum_{\beta_j^{(k-1)}=0}^{\gamma_j^{(k-1)}}\prod_{\nu=2}^{k}\left(\gamma_j^{(\nu)}-\alpha_j^{(\nu)}+1\right)_{\alpha_j^{(\nu)}}
\end{aligned} \tag{26}$$

と書き直せる．再び補題４の$\gamma^{(\nu)}$の定義式から

$$\begin{aligned}
\left(\gamma_j^{(\nu)}-\alpha_j^{(\nu)}+1\right)_{\alpha_j^{(\nu)}} &= \left(\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\left(\alpha_j^{(\mu)}-\beta_j^{(\mu)}\right)+1\right)_{\alpha_j^{(\nu)}} \\
&\le\left(\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\alpha_j^{(\mu)}+1\right)_{\alpha_j^{(\nu)}}
\end{aligned} \tag{27}$$

が成り立ち，等号が成立するのは，

$$\left(\beta_j^{(1)},\cdots,\beta_j^{(\nu-1)}\right)=(0,\cdots,0)$$

のとき，かつそのときに限る．この(26)と(27)から

$$\begin{aligned}
&T_j\left(\alpha_j^{(1)},\cdots,\alpha_j^{(k)}\right)\\
\leq&\alpha_j^{(1)}!\prod_{\nu=2}^{k}\left(\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\alpha_j^{(\mu)}+1\right)_{\alpha_j^{(\nu)}}\times\sum_{\beta_j^{(1)}=0}^{\gamma_j^{(1)}}\cdots\sum_{\beta_j^{(k-1)}=0}^{\gamma_j^{(k-1)}}1\\
=&\alpha_j^{(1)}!\left(\alpha_j^{(1)}+1\right)_{\alpha_j^{(2)}}\left(\alpha_j^{(1)}+\alpha_j^{(2)}+1\right)_{\alpha_j^{(3)}}\times\cdots\\
&\times\left(\alpha_j^{(1)}+\alpha_j^{(2)}+\cdots+\alpha_j^{(k-1)}+1\right)_{\alpha_j^{(k)}}\\
&\times\sum_{\beta_j^{(1)}=0}^{\gamma_j^{(1)}}\cdots\sum_{\beta_j^{(k-1)}=0}^{\gamma_j^{(k-1)}}1\\
=&\left(\alpha_j^{(1)}+\alpha_j^{(2)}+\cdots+\alpha_j^{(k)}\right)!\times\sharp L_j \qquad (28)
\end{aligned}$$

という評価式を得る．ただし，集合L_jは次のような格子点の有限集合であり，記号$\sharp L_j$はこの集合の要素の個数を表すものとする．

定義 13 非負整数を成分とする$k-1$次のベクトル

$$\left(\beta_j^{(1)},\cdots,\beta_j^{(k-1)}\right)$$

であって，各$\nu=1,\cdots,k-1$に対して

$$0\leq\beta_j^{(\nu)}\leq\gamma_j^{(\nu)}=\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\left(\alpha_j^{(\mu)}-\beta_j^{\mu)}\right)+\alpha_j^{(\nu)} \qquad (29)$$

を満たすもの全体のなす集合をL_jとする．■

評価式(28)の右辺を評価するためには，集合L_jの要素の個数$\sharp(L_j)$の評価が必要である．

補題 12 定義13で定まる集合L_jに対して，その要素の個数は評価式

$$\sharp(L_j)\leq\exp\left(\sum_{\mu=1}^{k-1}\alpha_j^{(\mu)}+(k-1)\right) \qquad (30)$$

を満たす．□

補題12の証明は4.3節で行うことにして，補題12の成立を仮定すれば補題７がいえることを，まず示そう．それは容易である．実際，補題12の成立を仮定すれば，それを(28)の右辺に用いて

$$\begin{aligned}
T_j\left(\alpha_j^{(1)},\cdots,\alpha_j^{(k)}\right)\leq&\left(\alpha_j^{(1)}+\alpha_j^{(2)}+\cdots+\alpha_j^{(k)}\right)!\\
&\times\exp\left(\sum_{\mu=1}^{k-1}\alpha_j^{(\mu)}+(k-1)\right)
\end{aligned}$$

を得る．この不等式の$j=1,\cdots,n$に関する積を考え，$\alpha!=\alpha_1!\cdots\alpha_n!\leq(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)!=|\alpha|!$を用いて，さらに$|\alpha^{(\mu)}|\leq m$に注意すると

$$\begin{aligned}
&S\left(\alpha^{(1)},\cdots,\alpha^{(k)}\right)\\
\leq&\left(\alpha^{(1)}+\alpha^{(2)}+\cdots+\alpha^{(k)}\right)!\\
&\times\exp\left(\sum_{\mu=1}^{k-1}|\alpha^{(\mu)}|+n(k-1)\right)\\
\leq&\left|\alpha^{(1)}+\alpha^{(2)}+\cdots+\alpha^{(k)}\right|!\exp\left((m+n)(k-1)\right)\\
\leq&(mk)!\exp\left((m+n)(k-1)\right)\\
=&(mk)!\,e^{-(m+n)}\left(e^{1+(n/m)}\right)^{mk}
\end{aligned}$$

が得られる．これで，補題７が補題12へ帰着できることが証明できた．

4.3　補題12の証明

最後に，補題12を示そう．基本的なアイデアは，集合L_jの各点にそれぞれその点を頂点にもつ$k-1$次元立方体を１対１に対応させて，それらの立方体の和集合の$k-1$次元体積を評価するというものである．

L_jの各点$p=\left(\beta_j^{(1)},\cdots,\beta_j^{(k-1)}\right)$に次のような立方体

$$Q(p):=\left\{x\in\mathbb{R}^{k-1};\,\beta_j^{(\nu)}\leq x_\nu\leq\beta_j^{(\nu)}+1\ (\forall\nu)\right\} \qquad (31)$$

を対応させると，この対応は１対１対応である．さらに，これらの立方体の和集合

$$\Omega_1:=\bigcup_{p\in L_j}Q(p)$$

を考える．(29)と(31)から，$x\in\Omega_1$であれば，$\nu=1$のとき

$$0\leq\beta_j^{(1)}\leq x_1\leq\beta_j^{(1)}+1\leq\alpha_j^{(1)}+1=:B_1(x_1')$$

が成り立つ．また，$\nu\geq2$であれば

$$\begin{aligned}
0\leq&\beta_j^{(\nu)}\leq x_\nu\leq\beta_j^{(\nu)}+1\leq\gamma_j^{(\nu)}+1\\
=&\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\left(\alpha_j^{(\mu)}-\beta_j^{(\mu)}\right)+\alpha_j^{(\nu)}+1\\
=&\sum_{\mu=1}^{\nu}\alpha_j^{(\mu)}-\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\left(\beta_j^{(\mu)}+1\right)+\nu\\
\leq&\sum_{\mu=1}^{\nu}\alpha_j^{(\mu)}+\nu-\sum_{\mu=1}^{\nu-1}x_\mu=:B_\nu(x_\nu')
\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって

$$\Omega_1\subset\Omega_2:=\left\{x\in\mathbb{R}^{k-1};\,0\leq x_\nu\leq B_\nu\left(x_\nu'\right)\ (\forall\nu)\right\} \qquad (32)$$

という包含関係が成立する．ただし，(32)の右辺において$x_\nu'=(x_1,\cdots,x_{\nu-1})$である．

対応$p \mapsto Q(p)$が1対1であること，立方体$Q(p)$の体積が1に等しいこと，および包含関係(32)から

$$\sharp(L_j) = \mathrm{vol}(\Omega_1) \le \mathrm{vol}(\Omega_2) = \int_{\Omega_2} 1\, dx_1 \cdots dx_{k-1} = \int_0^{B_1(x_1')} \left\{ \int_0^{B_2(x_2')} \cdots \left(\int_0^{B_{k-1}(x_{k-1}')} dx_{k-1} \right) \cdots dx_2 \right\} \times dx_1 \tag{33}$$

であることがわかる．この右辺の累次積分を評価する．

まず，(33)の右辺で，最も内側にあるx_{k-1}に関する積分から始めると

$$\int_0^{B_{k-1}(x_{k-1}')} dx_{k-1} = [x_{k-1}]_{x_{k-1}=0}^{B_{k-1}(x_{k-1}')} = B_{k-1}(x_{k-1}') = \sum_{\mu=1}^{k-1} \alpha_j^{(\mu)} + (k-1) - \sum_{\mu=1}^{k-2} x_\mu \tag{34}$$

となる．そこで，$k-\nu$に関する帰納法によって

$$\int_0^{B_\nu(x_\nu')} \cdots \left(\int_0^{B_{k-1}(x_{k-1}')} dx_{k-1} \right) \cdots dx_\nu \le \frac{1}{(k-\nu)!} \left(\sum_{\mu=1}^{k-1} \alpha_j^{(\mu)} + (k-1) - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} x_\mu \right)^{k-\nu} \tag{35}$$

が成り立つことを示そう．まず，$k-\nu=1$のときの(35)の成立は，(34)から直ちにわかる．次に，$k-\nu \ge 2$として，$k-\nu-1$のときの(35)が成り立つと仮定する．すると，$k-\nu$のとき，帰納法の仮定から

$$\begin{aligned}
&\int_0^{B_\nu(x_\nu')} \cdots \left(\int_0^{B_{k-1}(x_{k-1}')} dx_{k-1} \right) \cdots dx_\nu \\
\le &\int_0^{B_\nu(x_\nu')} \frac{1}{(k-\nu-1)!} \times \left(\sum_{\mu=1}^{k-1} \alpha_j^{(\mu)} + (k-1) - \sum_{\mu=1}^{\nu} x_\mu \right)^{k-\nu-1} dx_\nu \\
= &-\frac{1}{(k-\nu)!} \times \left[\left(\sum_{\mu=1}^{k-1} \alpha_j^{(\mu)} + (k-1) - \sum_{\mu=1}^{\nu} x_\mu \right)^{k-\nu} \right]_{x_\nu=0}^{B_\nu(x_\nu')}
\end{aligned}$$

が得られる．この右辺は，$B_\nu(x_\nu')$の定義を思い出すと次のように評価される：

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(k-\nu)!} \left(\sum_{\mu=1}^{k-1} \alpha_j^{(\mu)} + (k-1) - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} x_\mu \right)^{k-\nu} \\
&- \frac{1}{(k-\nu)!} \times \left(\sum_{\mu=1}^{k-1} \alpha_j^{(\mu)} + (k-1) - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} x_\mu - B_\nu(x_\nu') \right)^{k-\nu} \\
= &\frac{1}{(k-\nu)!} \left(\sum_{\mu=1}^{k-1} \alpha_j^{(\mu)} + (k-1) - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} x_\mu \right)^{k-\nu} - \frac{1}{(k-\nu)!} \left(\sum_{\mu=\nu+1}^{k-1} \alpha_j^{(\mu)} + (k-\nu-1) \right)^{k-\nu} \\
\le &\frac{1}{(k-\nu)!} \left(\sum_{\mu=1}^{k-1} \alpha_j^{(\mu)} + (k-1) - \sum_{\mu=1}^{\nu-1} x_\mu \right)^{k-\nu}.
\end{aligned}$$

よって，$k-\nu$のときの(35)が成り立つ．

したがって，$k-\nu$についての帰納法により，(35)がすべての$k-\nu = 1, \cdots, k-1$に対して成立することが示せた．

特に，$k-\nu = k-1$のとき，すなわち，$\nu=1$のときの(35)の成立により，次の評価式を得る．

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(\Omega_2) &= \int_{\Omega_2} 1\, dx_1 \cdots dx_{k-1} \\
&\le \frac{1}{(k-1)!} \left(\sum_{\mu=1}^{k-1} \alpha_j^{(\mu)} + (k-1) \right)^{k-1} \\
&\le \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \left(\sum_{\mu=1}^{k-1} \alpha_j^{(\mu)} + (k-1) \right)^{p} \\
&= \exp\left(\sum_{\mu=1}^{k-1} \alpha_j^{(\mu)} + (k-1) \right).
\end{aligned} \tag{36}$$

この(36)を(33)に結びつけると，補題12の目標だった不等式(30)，すなわち，

$$\sharp(L_j) \le \exp\left(\sum_{\mu=1}^{k-1} \alpha_j^{(\mu)} + (k-1) \right)$$

が得られる．以上で補題12の証明が完成した．

したがって，補題7の証明が完成して，我々の目標である定理1が証明できた．

参考文献：

1) 岡本清郷：等質空間上の解析学，紀伊国屋書店, 1980.
2) 坪井俊：幾何学I 多様体入門，東京大学出版会, 2005.
3) 坪井俊：幾何学III 微分形式，東京大学出版会，2008.
4) 服部晶夫：多様体 増補版，岩波書店，1989.

(2012.12.7受付)

A FINITENESS OF THE INDEX $\mu_{P,\,r}(f)$ FOR REAL-ANALYTIC FUNCTIONS ON A COMPACT REAL-ANALYTIC MANIFOLD

Makoto KAMETANI

ABSTRACT: Let M be an oriented compact real-analytic manifold and $P = P(x, \partial_x)$ a partial differential operator of order m defined on M with real-analytic coefficients. For a positive number r and for a real-analytic function f defined on M, we define an index $\mu_{P,\,r}(f)$ by

$$\mu_{P,\,r}(f) := \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{1}{(mk)!\, r^{mk}} \|P^k f\|,$$

where we denote the L^2 norm of a function h by $\|h\|$, which is determined by the volume element dv on M, and where we denote the set of all nonnegative integers by $\mathbb{Z}_+$. In this article we prove that the index $\mu_{P,\,r}(f)$ is finite when r is small enough. Although this theorem is well-known, our proof is elementary and the proof gives an explicit expression of the positive number r satisfying $\mu_{P,r}(f) < \infty$, from which we obtain the fact that r depends only on the radii of convergence of the function f and the coefficients of the operator P and on the maximum norms of the coefficients in their domains of convergence.

Key Words : *Real-analytic function, Compact real-analytic manifold, L^2 norm, Partial differential operator with real-analytic coefficients*